

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2017 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；答案若為分數，請化為最簡分數)

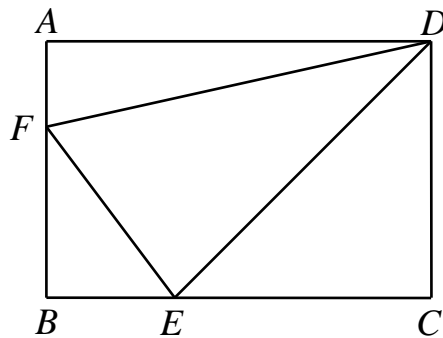
1. 將 $105^{2017} + 107^{2017}$ 除以 106 之後所得到的餘數為_____。

答：_____

2. 算式 $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 + \dots + 16 \times 17 \times 18 \times 19$ 之值為_____。

答：_____

3. 點 E 、 F 分別為長方形 $ABCD$ 兩條邊 BC 、 AB 上的點，使得 $\triangle ADF$ 的面積為 9 cm^2 、 $\triangle FBE$ 的面積為 6 cm^2 、 $\triangle CDE$ 的面積為 18 cm^2 ，如下圖所示，則長方形 $ABCD$ 的面積為_____ cm^2 。



答：_____ cm^2

4. 一個遞增數列由五個相異的正整數所組成，已知其首項為 5，且該數列中任意連續兩項的平方和也都是一個完全平方數。則此數列之末項的最小值為_____。

答：_____

5. 已知存在兩個實數 a 、 b 滿足 $a^2 + \sqrt{3}b = 4$ 、 $b^2 + \sqrt{3}a = 4$ 且 $a \neq b$ ，則 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的值為_____。

答：_____

6. 已知 a 、 b 均為整數。若方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 之二根的平方和小於 12，則 ab 的最大值為_____。

答：_____

7. 滿足以下方程組的四元正整數組 (x, y, z, t)

$$\begin{cases} x + y = zt \\ z + t = xy \end{cases}$$

共有 _____ 組。

答： _____ 組

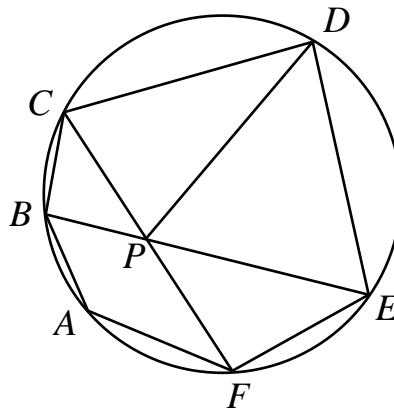
8. 用厚紙板剪出兩個全等的正 n 邊形，將它們上下重合起來，並用一枚大頭針穿過它們的中心。現將其上方的多邊形以大頭針為軸旋轉 32.5° ，發現它又與下方的多邊形重合。則 n 的最小值為 _____。

答： _____

9. 一個天平當秤盤內沒有放置砝碼時是平衡的。若在此天平的左秤盤內放置編號為 l_1, l_2, \dots, l_k 的 k 枚砝碼，右秤盤內放置編號為 r_1, r_2, \dots, r_k 的 k 枚砝碼，結果左邊的秤盤較重。如果交換任意兩枚足碼相同的砝碼，則總是右邊的秤盤變為較重或是兩邊平衡。則所有可能的 k 值之和為 _____。

答： _____

10. 已知六邊形 $ABCDEF$ 內接於一圓， BE 與 CF 相交於點 P 。若 $AB = BC$ 、 $CD = DE$ 、 $EF = FA$ 且有 $PB = 2 \text{ cm}$ 、 $PF = 3 \text{ cm}$ 、 $PD = 5 \text{ cm}$ ，則六邊形 $ABCDEF$ 的周長為 _____ cm 。

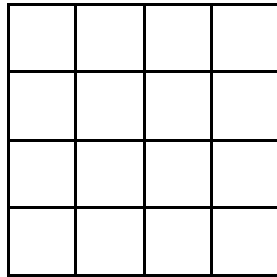


答： _____ cm

11. 某次宴會中連同小胡共有 26 位賓客，任意兩位賓客之間彼此互相認識或者彼此互相不認識。已知除了小胡以外的 25 位賓客所認識的賓客人數都互不相同，且每一位賓客都至少認識其他一位賓客，則小胡在此次宴會中總共認識 _____ 位賓客。

答： _____ 位

12. 在 4×4 的方格表上的每個小方格內各畫一條對角線，此對角線可將每一個小方格分成二個全等的直角三角形。將這 32 個直角三角形分別塗上黑色或白色中的一種，若任意兩個有共同邊的三角形所塗的顏色都不相同，稱這個圖為「美圖」，則 4×4 的方格表中總共有_____種不同的美圖。

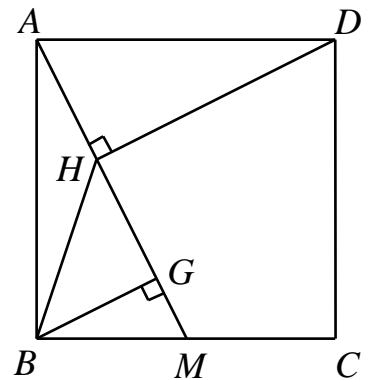


答：_____種

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在正方形 $ABCD$ 中，若點 M 為邊 BC 的中點，過點 B 、 D 分別做 AM 的垂線，垂足分別為點 G 、 H ，如圖所示，請證明 $\angle GBH = 45^\circ$ 。



2. 將十個正整數 11、12、13、 \dots 、20 任意地排成一個圓圈，請證明必存在相鄰的三個正整數之和大於 47。

3. 現有 n 個相異的正整數，其中的每一個數都小於 2017，且任取兩個數的最小公倍數都大於 2017。請證明這些數的倒數之和小於 2。