2017 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 將 $105^{2017}+107^{2017}$ 除以 106 之後所得到的餘數為______________。

【參考解法 1】

因 $105=106-1$ 、$107=106+1$，故 $105^{2017}=(106-1)^{2017}$ 、$107^{2017}=(106+1)^{2017}$ 。而由二項式定理可知分別將 $105^{2017}=(106-1)^{2017}$ 、$107^{2017}=(106+1)^{2017}$ 展開後所得的兩個展開式中，僅 $(-1)^{2017}=-1$ 與 $(1)^{2017}=1$ 這二項不是 106 的倍數，即可判斷出所得之餘數為 $-1+1=0$ 。

【參考解法 2】

因 2017 為奇數，故可得知

$$
\begin{aligned}
&105^{2017}+107^{2017}\\
&=(105+107)\times(105^{2016}-105^{2015}\times107+105^{2014}\times107^{2}-\cdots-105\times107^{2015}+107^{2016})\\
&=2\times106\times(105^{2016}-105^{2015}\times107+105^{2014}\times107^{2}-\cdots-105\times107^{2015}+107^{2016})
\end{aligned}
$$

即可判斷出所得之餘數為 0。

【參考解法 3】

因 $105\equiv-1\pmod{106}$ 、$107\equiv1\pmod{106}$，

故 $105^{2017}+107^{2017}\equiv(-1)^{2017}+(1)^{2017}\equiv0\pmod{106}$，即可判斷出所得之餘數為 0。

ANS：0

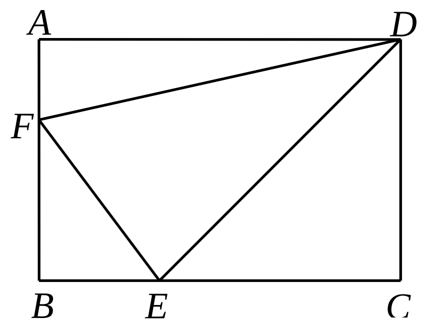
2. 算式 $1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+\cdots+16\times17\times18\times19$ 之值為______________。

【參考解法】

$$
\begin{aligned}
&1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+\cdots+16\times17\times18\times19\\
&=\frac{1}{5}\times2\times3\times4\times5+\frac{5}{5}\times2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6+\cdots+16\times17\times18\times19\\
&=\frac{6}{5}\times2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6+\cdots+16\times17\times18\times19\\
&=\frac{2}{5}\times3\times4\times5\times6+\frac{5}{5}\times3\times4\times5\times6+\cdots+16\times17\times18\times19\\
&=\frac{7}{5}\times3\times4\times5\times6+4\times5\times6\times7+\cdots+16\times17\times18\times19\\
&=\frac{8}{5}\times4\times5\times6\times7+5\times6\times7\times8+\cdots+16\times17\times18\times19\\
&\qquad\vdots\\
&=\frac{20}{5}\times16\times17\times18\times19\\
&=372096
\end{aligned}
$$

ANS：372096

3. 點 E、F 分別為長方形 $ABCD$ 兩條邊 BC、AB 上的點，使得△ADF 的面積為 9 cm^2、△FBE 的面積為 6 cm^2、△CDE 的面積為 18 cm^2，如圖所示，則長方形 $ABCD$ 的面積為______cm^2。



【參考解法】

令 $AD=BC=a$ cm、$AB=CD=b$ cm，則長方形 $ABCD$ 的面積為 ab cm^2。而由△ADF 面積為 9 cm^2 可以得知 $AF=\dfrac{18}{a}$ cm、由△CDE 面積為 18 cm^2 可以得知 $CE=\dfrac{36}{b}$ cm，故 $BF=AB-AF=b-\dfrac{18}{a}$ cm、$BE=BC-CE=a-\dfrac{36}{b}$ cm，此時再由△FBE 面積為 6 cm^2 可以得知 $\dfrac{1}{2}\times BF\times BE=6$，即 $\dfrac{1}{2}\times(b-\dfrac{18}{a})\times(a-\dfrac{36}{b})=6$，化簡得 $(ab)^2-66ab+18\times36=0$，因式分解可得 $(ab-54)(ab-12)=0$。可判斷出長方形 $ABCD$ 的面積 $ab>9+6+18>12$，故長方形 $ABCD$ 的面積 $ab=54\,\text{cm}^2$。

ANS：54 cm^2

4. 一個遞增數列由五個相異的正整數所組成，已知其首項為 5，且該數列中任意連續兩項的平方和也都是一個完全平方數。則此數列之末項的最小值為______________。

【參考解法】

令第二項為 B 且 $5^2+B^2=w^2$，則 $w^2-B^2=5^2$，即 $(w+B)(w-B)=25$。注意到 $w>B>5$，故 $w+B\neq w-B$，即 $w+B=25$、$w-B=1$。此時可解得 $B=12$。

令第三項為 C 且 $12^2+C^2=x^2$，則 $x^2-C^2=12^2$，即 $(x+C)(x-C)=3^2\times2^4$。注意到 $x>C>12$，故 $(x+C)-(x-C)=2C>24$，再因 $x+C$、$x-C$ 的奇偶性相同，故僅可能有 $x+C=36$、$x-C=4$。此時可解得 $C=16$。

令第四項為 D 且 $16^2+D^2=y^2$，則 $y^2-D^2=16^2$，即 $(y+D)(y-D)=2^8$。注意到 $y>D>16$，故 $(y+D)-(y-D)=2D>32$，再因 $y+D$、$y-D$ 的奇偶性相同，故可得二種情況：

情況(i)　$y+D=2^6=64$、$y-D=2^2=4$。

此時可解得 $D=30$。令第五項為 E 且 $30^2+E^2=z^2$，則 $z^2-E^2=30^2$，即 $(z+E)(z-E)=2^2\times3^2\times5^2$。注意到 $z>E>30$，故 $(z+E)-(z-E)=2E>60$，此時可得三種情況：

情況(i)-1：$z+E=2\times3^2\times5^2=450$、$z-E=2$。此時可解得 $E=224$。

情況(i)-2：$z+E=2\times3\times5^2=150$、$z-E=2\times3=6$。此時可解得 $E=72$。

情況(i)-3：$z+E=2\times3^2\times5=90$、$z-E=2\times5=10$。此時可解得 $E=40$。

情況(ii)　$y+D=2^7=128$、$y-D=2$。

此時可解得 $D=63$ 且可得知第五項恆大於 40。

因此第五項的最小值為 40。

ANS：40

5. 已知存在兩個實數 a、b 滿足 $a^2+\sqrt{3}b=4, b^2+\sqrt{3}a=4$ 且 $a\neq b$，則 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ 的值為________。

【參考解法】

由兩式相減可得知 $a^2-b^2-\sqrt{3}(a-b)=(a-b)(a+b-\sqrt{3})=0$。但因 $a\neq b$，故可得知 $a+b=\sqrt{3}$，將此式兩側平方可得 $a^2+2ab+b^2=3$。將前兩式代入，可得知

$4-\sqrt{3}b+2ab+4-\sqrt{3}a=3=8-\sqrt{3}(a+b)+2ab=8-3+2ab=5+2ab$，即 $ab=-1$.

$a^2+b^2=8-\sqrt{3}(a+b)=8-3=5$. 所以 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{5}{-1}=-5$。

ANS：-5

6. 已知 a、b 均為整數。若方程 $x^2+ax+2b=0$ 之二根的平方和小於 12，則 ab 的最大值為______________。

【參考解法】

令此方程的二根分別為 α、β，則由根與係數的關係知 $\alpha+\beta=-a$、$\alpha\beta=2b$，故有 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-4b<12$。

由題意可得知此方程的判別式 $D=a^2-8b\geq 0$，即 $a^2\geq 8b$，因此 $a^2-4b\geq 4b$，故 $4b<12$，即 $b<3$。若 $b<0$，則由 $a^2-4b<12$ 知 $-4b<12$，即 $b>-3$。故可得 $-3<b<3$。

而 $\alpha^2+\beta^2=(\dfrac{-a+\sqrt{D}}{2})^2+(\dfrac{-a-\sqrt{D}}{2})^2=\dfrac{a^2+D}{2}<12$，因此 $a^2+D<24$。因為 a 是整數且有 $D\geq 0$，故 $-4\leq a\leq 4$。

現由 a、b 均為整數知 ab 的最大值可為 $2\times 4=(-2)\times(-4)=8$。

若取 $a=4$、$b=2$，此時方程為 $x^2+4x+4=0$，二根的平方和為 $8<12$，即 ab 的最大值 8 的確會發生。

ANS：8

7. 滿足以下方程組的四元正整數組 (x, y, z, t)

$$\begin{cases} x+y=zt \\ z+t=xy \end{cases}$$

共有______________組。

【參考解法】

將兩條方程相加可得 $x+y+z+t=zt+xy$，移項並化簡可得：

$$(x-1)(y-1)+(z-1)(t-1)=2$$

可知等式左、右兩邊都是非負整數，故：

(i) $(x-1)(y-1)=1$、$(z-1)(t-1)=1$。此時 $x=y=z=t=2$，共 1 組解。

(ii) $(x-1)(y-1)$ 與 $(z-1)(t-1)$ 其中一項為 0 而另一項為 2。

由對稱性可先假設 $(x-1)(y-1)=2$、$(z-1)(t-1)=0$，且 $x\geq y$、$z\geq t$。此時可得 $x=3$、$y=2$、$t=1$ 且 $z=x+y=5$。但因實際上 x、y、z、t 並無限

制大小關係，且也可能為$(x-1)(y-1)=0$、$(z-1)(t-1)=2$，故此情況總共有$1\times2\times2\times2=8$組解：(3, 2, 1, 5)、(3, 2, 5, 1)、(2, 3, 1, 5)、(2, 3, 5, 1)、(1, 5, 3, 2)、(1, 5, 2, 3)、(5, 1, 3, 2)、(5, 1, 2, 3)。

因此共有$1+8=9$ 組四元正整數組(x, y, z, t)滿足此方程組。

ANS：9 組

8. 用厚紙板剪出兩個全等的正 n 邊形，將它們上下重合起來，並用一枚大頭針穿過它們的中心。現將其上方的多邊形以大頭針為軸旋轉$32.5°$，發現它又與下方的多邊形重合。則 n 的最小值為______________。

【參考解法】

因正 n 邊形的每一個頂點必都在同一個圓上、每一條邊都是該圓的一條弦，故若令每一條邊所對的圓心角為$\alpha=\dfrac{360°}{n}$，則因$32.5°$為α的正整數倍，故可再推知存在一個正整數 k 使得$\alpha=\dfrac{32.5°}{k}$。因此$\dfrac{32.5°}{k}=\dfrac{360°}{n}$，化簡得$n=\dfrac{144k}{13}$。因 13 與 144 互質，所以 n 的最小值發生在$k=13$時，此時$n=144$。

ANS：144

9. 一個天平當秤盤內沒有放置砝碼時是平衡的。若在此天平的左秤盤內放置編號為l_1、l_2、…、l_k的 k 枚砝碼，右秤盤內放置編號為r_1、r_2、…、r_k的 k 枚砝碼，結果左邊的秤盤較重。如果交換任意兩枚足碼相同的砝碼，則總是右邊的秤盤變為較重或是兩邊平衡。則所有可能的 k 值之和為______________。

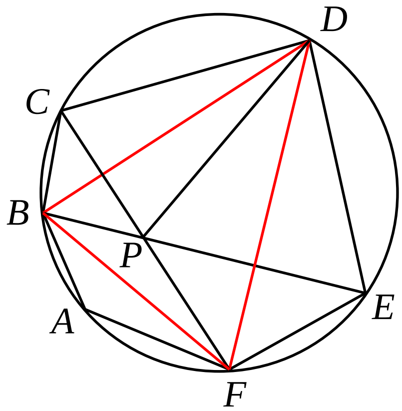
【參考解法】

令左邊秤盤的砝碼總重為 L、右邊秤盤的砝碼總重為 R。由題意可以判斷出，對於任意的$1\le m\le k$，恆有$L-l_m+r_m\le R-r_m+l_m$，此即$0\le L-R\le 2(l_m-r_m)$。因此將由 k 個 m 值所得之不等式相加，可得$k(L-R)\le 2(L-R)$，即$k=1$或 2，故所有可能的 k 值之和為 3。

ANS：3

10. 已知六邊形 $ABCDEF$ 內接於一圓，BE 與 CF 相交於點 P。若$AB=BC$、$CD=DE$、$EF=FA$且有$PB=2$ cm、$PF=3$ cm、$PD=5$ cm，則六邊形 $ABCDEF$ 的周長為______________cm。

【參考解法】



連接BD、DF、FB。

因$AB=BC$，故知$\angle AFB=\angle BFC$；

因$EF=FA$，故知$\angle FBA=\angle FBE$，

故再由$BF=BF$可得知三角形FAB與三角形FPB全等，所以$BP=BA=BC$。

再因$CD=DE$，所以$\angle DBC=\angle DBE$，

故再由$BD=BD$可得知三角形BCD與三角形BPD全等，因此$PD=CD=DE$。

同樣地，也可推得三角形DEF與三角形DPF全等，因此$PF=EF=FA$。故

$$\begin{aligned}AB+BC+CD+DE+EF+FA&=BP+BP+PD+PD+PF+PF\\&=2(BP+PD+PF)\\&=2\times10=20\end{aligned}$$

ANS：20 cm

11. 某次宴會中連同小胡共有 26 位賓客，任意兩位賓客之間彼此互相認識或者彼此互相不認識。已知除了小胡以外的 25 位賓客所認識的賓客人數都互不相同，且每一位賓客都至少認識其他一位賓客，則小胡在此次宴會中總共認識__________位賓客。

【參考解法】

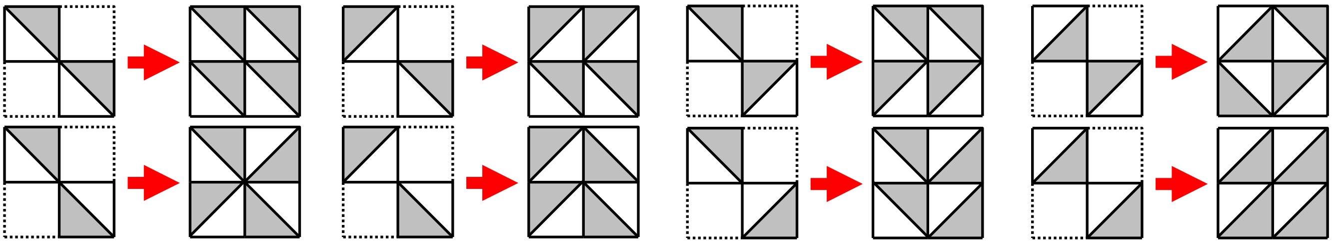
此時賓客所認識的賓客人數最多為 25。因除了小胡以外還有 25 位賓客且這 25 位賓客所認識的賓客人數都互不相同，故知他們個別所認識的賓客人數為 1、2、…、24、25。在不將小胡分組的情形下，將所認識的賓客人數少於或等於 12 的分為 A 組、多於或等於 13 的分為 B 組，則在允許重複計數下，A 組中所有 12 位賓客所認識的賓客總人數為$1+\cdots+12=78$、而 B 組中所有 13 位賓客所認識的賓客總人數為$13+14+\cdots+24+25=247$。因 B 組的所有賓客所認識在 B 組中的賓客總人數至多為$13\times12=156$，此值在加上 78 後恰比 247 少 13，故可以判斷出在 B 組的每一位賓客都認識小胡，即在 B 組中的賓客都是小胡認識的賓客。另一方面，在 A 組的所有賓客所認識的賓客都一定都是在 B 組中的賓客，即在 A 組中的賓客都是小胡不認識的賓客。因此小胡僅恰認識 B 組 13 位的賓客。

ANS：13 位

12. 在4×4的方格表上的每個小方格內各畫一條對角線，此對角線可將每一個小方格分成二個全等的直角三角形。將這 32 個直角三角形分別塗上黑色或白色中的一種，若任意兩個有共同邊的三角形所塗的顏色都不相同，稱這個圖為「美圖」，則4×4的方格表中總共有__________種不同的美圖。

【參考解法】

在一個小方格內共有二種選擇對角線的方式且每選定一條對角線後，會有二種塗法，因此一個小方格共有$2\times2=4$種塗色方式。在一個2×2的方格表中，一旦兩個位於對角的小方格之對角線被畫出且已塗色，如圖所示，則另二個小方格畫的對角線與塗色方式也會被確定，故此方格表有$4\times4=16$種不同的美圖。



（以上各圖黑、白可同時互換顏色）

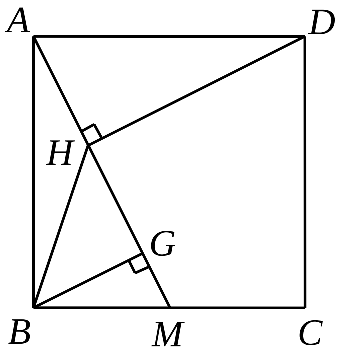
而可知在4×4的方格表中對角線上的 4 個小方格畫的對角線與塗色方式都是彼此獨立互不影響的，故知共有$4^4=256$種塗色方式。因這 4 個小方格塗法確定後，透過觀察2×2的子方格表可判斷出其餘的方格畫的對角線與塗色方式也會被確定，故在4×4的方格表上共有 256 種不同的美圖。

ANS：256 種

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在正方形 $ABCD$ 中，若點 M 為邊 BC 的中點，過點 B、D 分別做 AM 的垂線，垂足分別為點 G、H，如圖所示，請證明$\angle GBH=45^\circ$。



【參考解法】

由$AB=DA$、$\angle GBA=90^\circ-\angle GAB=\angle HAD$、$\angle BGA=90^\circ=\angle AHD$可以得知三角形 ABG 與三角形 DAH 為全等三角形，因此$BG=AH$。(5 分)

因三角形 ABM 是以角 B 為直角的直角三角形，故再由$BG\perp AM$ 可判斷出三角形 BAG 與三角形 MAB 為相似三角形。(5 分)

現因點 M 為邊 BC 的中點，故$\dfrac{AG}{BG}=\dfrac{AB}{BM}=2$，此時可得知$AG=2BG$，

即$HG=AG-AH=BG$，(5 分)

所以三角形 HGB 是以角 G 為直角的等腰直角三角形，故$\angle GBH=45^\circ$。(5 分)

2. 將十個正整數 11、12、13、⋯、20 任意地排成一個圓圈，請證明必存在相鄰的三個正整數之和大於 47。

【參考解法】

假設任取相鄰的三個正整數之和至多為 47。觀察除了 11 以外的九個數。(5 分)

此時若將這九個數依序分成三組，每一組各有三個數，(5 分)

則可判斷出這九個數之和至多為$3\times47=141$，即這十個正整數之和至多為$11+141=152$。(5 分)

但實際計算可得知這十個正整數之和為

$11+12+13+14+15+16+17+18+19+20=155>152$，故不合。(5 分)

因此必存在相鄰的三個正整數之和大於 47。

3. 現有 n 個相異的正整數，其中的每一個數都小於 2017，且任取兩個數的最小公倍數都大於 2017。請證明這些數的倒數之和小於 2。

【參考解法】

可知對於正整數 1 到 m 中，可被 b 整除的數共有 $\left[\dfrac{m}{b}\right]$，其中[*]是高斯符號，故有 $\dfrac{m}{b}-1<\left[\dfrac{m}{b}\right]$。(5 分)

令這 n 個數為 a_1、a_2、⋯、a_n，易知 $n<2017$ 。(5 分)

則因任取兩個數的最小公倍數都大於 2017，故 1、2、⋯、2017 中的每一個數都無法同時被 a_1、a_2、⋯、a_n 中的兩個數整除，所以可推得 1、2、⋯、2017 中可被 a_1、a_2、⋯、a_n 其中任意一個數所整除的數的個數為

$\left[\dfrac{2017}{a_1}\right]+\left[\dfrac{2017}{a_2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{2017}{a_n}\right]$，且不會超過 2017，(5 分)

因此可得知

$$(\frac{2017}{a_1}-1)+(\frac{2017}{a_2}-1)+\cdots+(\frac{2017}{a_n}-1)<\left[\frac{2017}{a_1}\right]+\left[\frac{2017}{a_2}\right]+\cdots+\left[\frac{2017}{a_n}\right]<2017$$

$$2017(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})<2017+n<2017+2017$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$$

(5 分)