2018 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽 個人賽試題

________縣市________國民中學____年級 編號：________ 姓名：_________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；答案若為分數，請化為最簡分數)

1. 已知△*ABC* 三個邊的長度均為整數 cm，若△*ABC* 最長邊的長度為 13 cm，則滿足這樣條件且互不全等的三角形共有__________個。(註:邊長為 13 cm 的正三角、兩腰長為 13 cm 的等腰三角形都要計算在內。)

【參考解法】

因最長邊的長度為13 cm，故另二條邊之長度至多為13 cm；而由三角形的任意兩邊長之和必大於第三邊長可得知另兩條邊的長度之和之可能值為14 cm、15 cm、16 cm、17 cm、18 cm、19 cm、20 cm、21 cm、22 cm、23 cm、24 cm、25 cm、26 cm。

因將14寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$1+13=2+12=3+11=4+10=5+9=6+8=7+7，$$

故若另二條邊長之和為14 cm時，則有7種可能；

因將15寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$2+13=3+12=4+11=5+10=6+9=7+8，$$

故若另二條邊長之和為15 cm時，則有6種可能；

因將16寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$3+13=4+12=5+11=6+10=7+9=8+8，$$

故若另二條邊長之和為16 cm時，則有6種可能；

因將17寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$4+13=5+12=6+11=7+10=8+9，$$

故若另二條邊長之和為17 cm時，則有5種可能；

因將18寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$5+13=6+15=7+11=8+10=9+9，$$

故若另二條邊長之和為18 cm時，則有5種可能；

因將19寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$6+13=7+12=8+11=9+10，$$

故若另二條邊長之和為19 cm時，則有4種可能；

因將20寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$7+13=8+12=9+11=10+10，$$

故若另二條邊長之和為20 cm時，則有4種可能；

因將21寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$8+13=9+12=10+11，$$

故若另二條邊長之和為21 cm時，則有3種可能；
因將22寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$9+13=10+12=11+11，$$

故若另二條邊長之和為22 cm時，則有3種可能；
因將23寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$10+13=11+12，$$

故若另二條邊長之和為23 cm時，則有2種可能；
因將24寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$11+12=12+12，$$

故若另二條邊長之和為24 cm時，則有2種可能；
因將25寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$12+13，$$

故若另二條邊長之和為25 cm時，則有1種可能；
因將26寫成兩個不大於13的正整數之和的情況有

$$13+13，$$

故若另二條邊長之和為26 cm時，則有1種可能。

因此總共有$1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+7=49$個滿足條件的不全等三角形。

答：49個

2. 設 a、b 為兩個不相等的實數且滿足 $a^2+\sqrt{3}b=4$、$b^2+\sqrt{3}a=4$，則 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ 之值為________。

【參考解法】

將 $a^2+\sqrt{3}b=4$、$b^2+\sqrt{3}a=4$ 兩式相減可得 $(a^2-b^2)+\sqrt{3}(b-a)=0$，移項化簡即得 $a+b=\sqrt{3}$，因此 $(a+b)^2=3$，且由 $a^2+\sqrt{3}b=4$ 得 $a^2+(a+b)b=(a+b)^2+1$，化簡即得 $ab=-1$。故 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\dfrac{3+2}{-1}=-5$。

答：-5

3. 已知 a、b、c 為滿足 $ax+by+2c=0$、$c\neq 0$、$ab-c^2\geq 0$ 的實數，則 xy 的最大值為__________。

【參考解法】

可知 $ax+by=-2c$，且由算幾不等式可知 $\dfrac{ax+by}{2}\geq\sqrt{ax\times by}$，因此 $\sqrt{abxy}\leq -c$，兩邊平方可得 $abxy\leq c^2$，即 $xy\leq\dfrac{c^2}{ab}$。再由 $ab-c^2\geq 0$ 可得知 $\dfrac{c^2}{ab}\leq 1$，因此xy的最大值為1。

答：1

4. 設$\{a_n\}$為等差數列且其公差為負數，已知$a_2a_{10}+a_2a_6+a_6a_{14}+a_{10}a_{14}=0$。當此數列前 n 項的和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$的值為最大時，則 n 之最小值為＿＿＿＿＿＿。

【參考解法】

令公差為d。因公差為負數，故知前n項的和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$的值為最大時，$a_n\ge 0$。將$a_2a_{10}+a_2a_6+a_6a_{14}+a_{10}a_{14}=0$化簡可得$(a_2+a_{14})(a_6+a_{10})=0$，可得：

(i) $a_2+a_{14}=0$，即$a_2=-a_{14}$。而$a_{14}=a_2+12d$，故$a_2=-a_2-12d$，即$a_2=-6d$，因此可推知$a_3=-5d$、$a_4=-4d$、$a_5=-3d$、$a_6=-2d$、$a_7=-d$、$a_8=0$。

(ii) $a_6+a_{10}=0$，即$a_6=-a_{10}$。而$a_{10}=a_6+4d$，故$a_6=-a_6-4d$，即$a_6=-2d$，因此可推知$a_7=-d$、$a_8=0$。

所以n之最小值為7。

答：7

5. 設$m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{2\sqrt{100}}$，則 m 的整數部分為＿＿＿＿＿＿。

【參考解法】

可知$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2}{2\sqrt{a}}<\frac{2}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}=2(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})$，因此$\frac{1}{2\sqrt{a}}<\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$，即可得知$m<(1-0)+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=\sqrt{100}=10$；

也可知$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2}{2\sqrt{a}}>\frac{2}{(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}=2(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})$，因此$\frac{1}{2\sqrt{a}}>\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$，即可得知$m>(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{101}-\sqrt{100})=\sqrt{101}-1$。因為$10=\sqrt{100}<\sqrt{101}<\sqrt{121}=11$，故$9<\sqrt{101}-1<10$，即$m>9$。因此$m$的整數部分為9。

答：9

6. 已知兩個整數 x、y，其中$x\ge y$，若$(x+y)$、$(x-y)$、xy、$\frac{x}{y}$之和恰等於1800。則這樣的序對(x,y)共有＿＿＿＿＿組。

【參考解法】

由題意可知$1800=(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=2x+xy+\frac{x}{y}$。因 $2x$ 與 xy 恆為整數，故$\frac{x}{y}$也必為整數，因此 x 為 y 的倍數且 y 不可為 0。故若假設$x=ay$，則可以得到$1800=2ay+ay^2+a$，化簡得$(y+1)^2=\frac{1800}{a}$。因$1800=2^3\times 3^2\times 5^2$，故可使得$\frac{1800}{a}$為完全平方數的 a 值有 2、$2^3=8$、$2\times 3^2=18$、$2\times 5^2=50$、$2^3\times 3^2=72$、$2^3\times 5^2=200$、$2\times 3^2\times 5^2=450$與$2^3\times 3^2\times 5^2=1800$。但若取$a=1800$，則$y=0$，不合。因此共有 7 組。

答：7 組

7. 若一個正整數可以表示為兩個連續奇數的平方差，稱該正整數為「幸運數」，例如$8=3^2-1^2$、$32=9^2-7^2$，故 8、32 均為幸運數。則在不超過 2018 的正整數中，幸運數的總和為__________。

【參考解法】

可知正奇數可表示為$2a+1$，其中$a=0$、1、2、3、…。故可判斷出兩個連續奇數的平方差可表示為$((2a+3)-(2a+1))((2a+3)+(2a+1))=8(a+1)$，因此幸運數即為 8 的倍數。故在不超過 2018 的正整數中，幸運數的總和為

$$8+16+24+\cdots+2016=255024。$$

答：255024

8. 在多項式$(x^7+x^3+1)^{20}$展開並合併同類項之後所得的多項式中，則 x^{20}的係數為__________。

【參考解法】

可知若x^n出現在$(x^7+x^3+1)^{20}$的展開式中，則必存在小於 20 的非負整數 a、b 使得$7a+3b=n$。當$n=20$時，由$7a+3b=20$可知$b=\dfrac{20-7a}{3}=6-2a+\dfrac{2-a}{3}$，此時僅一組正整數解$a=2$、$b=2$，即 20 個$(x^7+x^3+1)^{20}$相乘的式子中，需選出二個式子的$x^7$項、再從其餘的式子中選出二個式子的$x^3$項，因此$x^{20}$的係數為$\dfrac{20\times19}{2}\times\dfrac{18\times17}{2}=29070$。

答：29070

9. 數列中的第 1 項為 1、第 2 項為$4+10+19$、第 3 項為$31+46+64+85+109$、第 4 項為$136+166+\cdots+361$、…。前面所敘述的 19 稱為第 2 項中第 3 個數，而 46 稱為第 3 項中的第 2 個數，則此數列中第 18 項中的第 19 個數為__________。

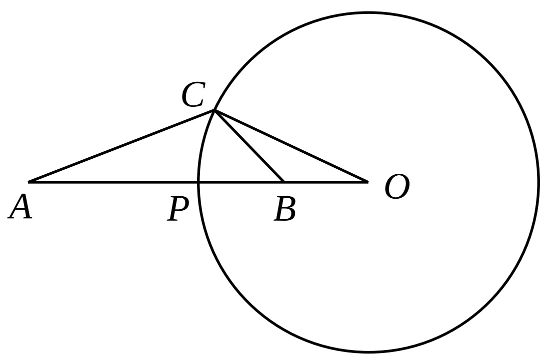
【參考解法】

由第 1 項有 1 個數、第 2 項有 3 個數、第 3 項有 5 個數可判斷出第 n 項有$2n-1$個數，因此前 17 項共有$1+3+5+\cdots+(2\times17-1)=289$個數，第 18 項中的第 19 個數即為全部的第 308 個數。若不考慮加號而把全部的數寫成一個數列，則可觀察第 m 個數比第$m-1$個數多$3(m-1)$。而第 308 個數比第一個數多$3(1+2+3+\cdots+307)=141834$，即第 18 項中的第 19 個數為

$$1+141834=141835。$$

答：141835

10. 已知點 P 在線段 AB 上、點 O 在線段 AB 延長線上。再以點 O 為圓心、OP 為半徑作圓，並在圓上取一點 C，如圖所示。若$AP=2BP$、OP 是 OA 與 OB 的比例中項，則 $AC:BC$ 的比值為__________。



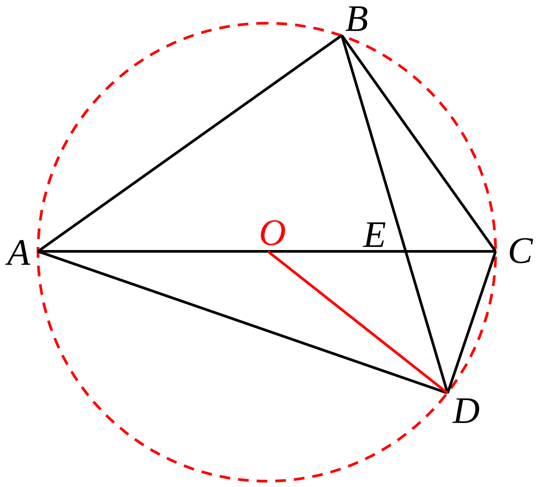
【參考解法】

由 OP 是 OA 與 OB 的比例中項可得知 $OP^2 = OA \times OB$，且有 $OC = OP$，因此可以得知 $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OB}{OC}$；再由 $\angle AOC = \angle COB$，故 $\triangle AOC \sim \triangle COB$，即 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{OC}{OB}$。

現不妨令 $BP = 1$、$AP = 2$、$OC = x$，則由 $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OB}{OC}$ 可得 $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{x-1}{x}$，再化簡得 $x^2 = x^2 + x - 2$，即 $x = 2$，因此 $OB = 2-1 = 1$，即 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{OC}{OB} = \dfrac{2}{1} = 2$。

答：2

11. 在四邊形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$、$AB = BD$ 且點 E 為對角線 AC 與 BD 的交點，如圖所示。若 AC 的長度為 90 cm、CE 的長度為 18 cm，則邊 CD 的長度為______________ cm。



【參考解法】

由 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ 可判斷出四邊形 $ABCD$ 為一個圓內接四邊形，故若令 $\angle ACD = 2x$，則可以得知 $\angle ABD = \angle ACD = 2x$。再因為 $AB = BD$，所以可推得 $\angle BAD = \angle BDA = \dfrac{180^\circ - 2x}{2} = 90^\circ - x$，因此

$$\angle BDC = \angle ADC - \angle BAD = 90^\circ - (90^\circ - x) = x$$

$$\angle CAD = 180^\circ - (\angle ACD + \angle ADC) = 90^\circ - 2x$$

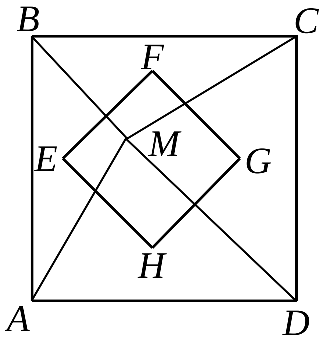
令點 O 為外接圓圓心並連接 OD，則由 $OA = OD$ 可得知

$$\angle ODA = \angle OAD = \angle CAD = 90^\circ - 2x$$

因此 $\angle ODC = 2x = 2\angle BDC$，即 DB 為 $\angle ODC$ 的角平分線。故由角平分線定理可以得到 $\dfrac{CD}{OD} = \dfrac{CE}{EO}$，即 $\dfrac{CD}{45} = \dfrac{18}{45-18}$，因此邊 CD 的長度為 $\dfrac{18}{27} \times 45 = 30$ cm。

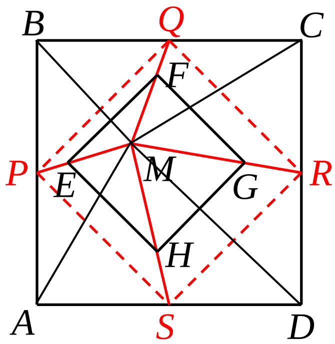
答案：30 cm

12. 已知正方形 $ABCD$ 的面積為 360 cm^2，點 M 為正方形內部一點。令點 E、F、G、H 分別為三角形 MAB、MBC、MCD、MDA 的重心，如圖所示。則四邊形 $EFGH$ 之面積為＿＿＿＿＿ cm^2。



【參考解法】

令點 P、Q、R、S 分別為邊 AB、BC、CD、DA 的中點。顯然，$PQRS$ 是個正方形。令點 E、F、G、H 分別為三角形 MAB、MBC、MCD、MDA 的重心。則可知 $\frac{ME}{MP}=\frac{MF}{MQ}=\frac{MG}{MR}=\frac{MH}{MS}=\frac{2}{3}$，即四邊形 $EFGH$ 也是正方形，且其面積為正方形 $PQRS$ 面積的 $(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$。而正方形 $PQRS$ 面積為正方形 $ABCD$ 面積的 $\frac{1}{2}$，因此 $EFGH$ 面積為 $360\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=80\ cm^2$。



答：80 cm^2

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 已知正整數 $n \le 2018$。請問使得 $14^n+10^n-3^n-1$ 之值可被 143 整除的 n 值有多少個？

【參考解法】

可知 $143=11\times 13$，即 $14^n+10^n-3^n-1$ 可被 143 整除的充要條件為 $14^n+10^n-3^n-1$ 是 11 與 13 的公倍數。(給 5 分)

$14^n+10^n-3^n-1 \equiv 3^n+(-1)^n-3^n-1 \equiv (-1)^n-1 \pmod{11}$，因此 $14^n+10^n-3^n-1$ 是 11 的倍數的充要條件是 $(-1)^n \equiv 1 \pmod{11}$，即 n 為偶數；(給 5 分)

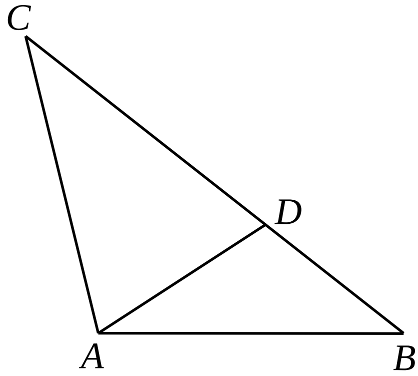
$14^n+10^n-3^n-1 \equiv 1^n+(-3)^n-3^n-1 \equiv (-1)^n\times 3-3^n \pmod{13}$，因此 $14^n+10^n-3^n-1$ 是 13 的倍數的充要條件是 $(-1)^n \equiv 1 \pmod{13}$，即 n 為偶數；(給 5 分)

故知只需 n 為偶數，$14^n+10^n-3^n-1$ 便可被 143 整除。因此共有 $\dfrac{2018}{2}=1009$ 個 n 值可使得 $14^n+10^n-3^n-1$ 之值被 143 整除。(給 5 分)

答：1009 個

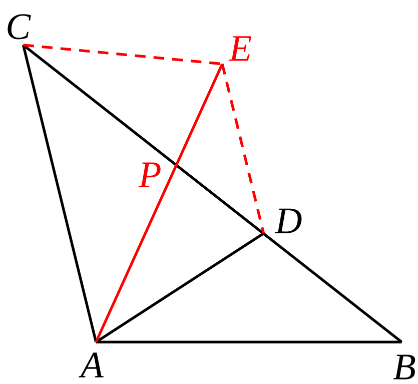
- 若透過觀察 $n=1$、2、3、4 的情況而判斷 n 為偶數並得到 1009，5 分

2. 在△ABC 中，點 D 在 BC 邊上使得 $AB=CD$ 且 $2\angle BAD+3\angle ABD=180°$，如圖所示。請證明 $\angle CAD=\angle BAD+\angle ABD$。



【參考解法】

在 BC 上取一點 P 使得 $\angle BAD=\angle PAD$。在直線 AP 上點 E，使得 $AB=AE$。連接 DE 與 CE。由點 E 的取法可判斷出△$ABD\cong$△AED，故 $\angle ADE=\angle ADB$。(給 5 分)由 $\angle ADE=\angle CDE+\angle ADC$ 可得



$$\begin{aligned}\angle CDE+\angle ADC&=\angle ADB\\&=180°-(\angle BAD+\angle ABD)\\&=2\angle BAD+3\angle ABD-(\angle BAD+\angle ABD)\\&=\angle BAD+2\angle ABD\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle CDE&=\angle BAD+2\angle ABD-\angle ADC\\&=\angle BAD+2\angle ABD-(\angle BAD+\angle ABD)\\&=\angle ABD\end{aligned}$$

(給 5 分)因△ $ABD \cong$ △ AED，所以 $\angle AED = \angle ABD = \angle CDE$ ，即可得知 $EP = DP$ ；接著再由 $AE = AB = CD$ 可判斷出 $AP = CP$ ，因此 $\angle ACP = \angle CAP$ ，(給 5 分)故有

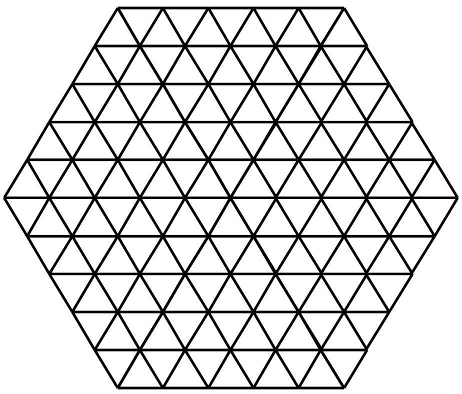
$$\angle CPE = \angle ACP + \angle CAP = 2\angle CAP$$

$$\angle CPE = \angle PDE + \angle PED = 2\angle PED$$

即 $\angle CAP = \angle PED$ 。此時即可得

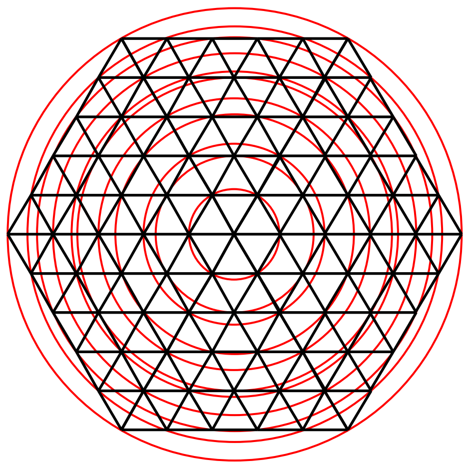
$$\angle CAD = \angle DAP + \angle CAP = \angle BAD + \angle PED = \angle BAD + \angle ABD$$ 。(給 5 分)

3. 將一個邊長為 5 單位的正六邊形分割為許多邊長為 1 的小正三角形，如圖所示。將這些正三角形的頂點(共 91 個)任意塗上紅色或藍色。在此圖上以任意頂點、任意半徑作圓，若在這 91 個點中塗上 A 色的點數較多。無論如何塗色，請問在 A 色的點最多的圓上至少有多少個塗上 A 色的點？



【參考解法】

這 91 個頂點除了中心的點外，其餘的點都再以該中心為圓心的 11 個同心圓中的某一個圓上。(給 5 分)如果每個同心圓都至多有 4 個頂點同色，則紅色的點之數量不超過 $4 \times 11 = 44$ 個，藍色的點之數量也不超過 44，(給 5 分)紅點與藍點之總和小於 $44 + 44 + 1 = 89$ ，矛盾。(給 5 分)所以無論如何塗色，一定可以找到 5 個塗上 A 色的點在同一個圓上。(給 5 分)



答：5 個