2018 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 有 2018 個算式：

$$(1000-1)^{1}、(1000-2)^{2}、\cdots、(1000-2018)^{2018}。$$

在這些算式的數值中總共有____________個值是負數。

【參考解法】

因任意一個數的偶冪次恆非負數、正數的任意冪次恆為正數，故知 $(1000-n)^{n}$ 是負數若且唯若底數 $1000-n$ 是負數且指數 n 是奇數，即 n 為大於 1000 的奇數。而 1、2、…、2018 中大於 1000 的奇數共有 $\dfrac{2018-1000}{2}=509$ 個。

答案：509 個

2. <u>小傑</u>在算 $1+2+\cdots+n$ 的和時，將 1 至 n 當中的一個數 a 多加了一次，最後得到的答案為 2018，則 a 之值為____________。

【參考解法】

可知 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，因此 $\dfrac{n(n+1)}{2}+a=2018$。

而由 $\dfrac{n(n+1)}{2}+1\le\dfrac{n(n+1)}{2}+a\le\dfrac{n(n+1)}{2}+n$ 可得 $\dfrac{n(n+1)}{2}+1\le 2018\le\dfrac{n(n+1)}{2}+n$，

化簡得 $n(n+1)+2\le 4036\le n(n+1)+2n=n(n+3)$。觀察：

(i) $63\times 64+2=4034<4036<64\times 65+2=4162$

(ii) $62\times 65=4030<4036<63\times 66=4158$

故知可取 $n=63$，此時 $\dfrac{63(63+1)}{2}=2016$，即 $a=2$。

答案：2

3. 已知 $\overline{abcd}$ 是一個四位數，且數碼 a、d 都不是 0。若 $\overline{abcd}$ 與 $\overline{dcba}$ 之和的末兩位數為 58，則 $\overline{abcd}$ 的最大值是____________。

【參考解法 1】

若數碼 a、b、c 都是 9，則 $\overline{dcba}$ 的末兩位數為 99，此時 $\overline{abcd}$ 與 $\overline{dcba}$ 之和的末兩位數為 $99+90+d=189+d$ 的末兩位數。因 $1\le d\le 9$，故 $189+d$ 的十位數碼為 9，故不合；

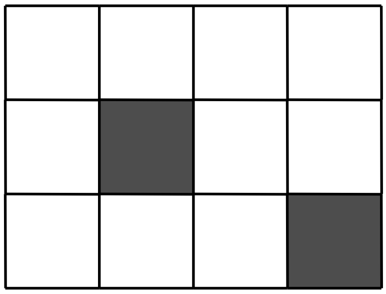
若數碼 a、b 都是 9，則 $\overline{dcba}$ 的末兩位數為 99，因此 $\overline{abcd}$ 的末兩位數為 59，即 $\overline{abcd}=9959$，因 $d=9\ne 0$，故滿足題目的條件。若 a、b 不都是 9，則 $\overline{abcd}\le 9899$。因此 $\overline{abcd}$ 的最大值是 9959。

【參考解法 2】

若數碼 a、b 不同時為 9，則 $\overline{abcd}\le 9899$；若 $a=b=9$，則可判斷出 $a+d=18$、$b+c+1=15$，即 $d=9$、$c=5$，因此 $\overline{abcd}=9959$。故 $\overline{abcd}$ 的最大值是 9959。

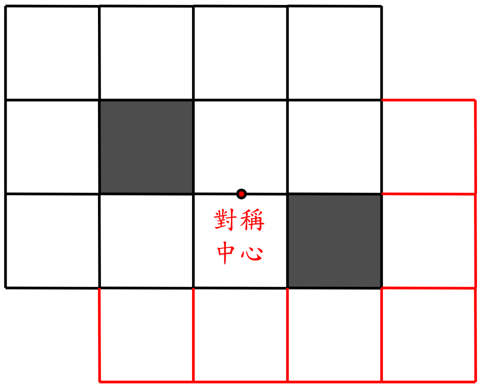
答案： 9959

4. 有 12 個大小相同的小正方形拼成一個矩形，其中 10 個為白色、2 個為黑色，如下圖所示。則至少要再加入______________個同樣大小且僅為白色的小正方形才能使得所得到的圖形是中心對稱的圖案。



【參考解法】

由於只有 2 個黑色小正方形，且不再加入黑色小正方形，故所得圖形的對稱中心必為這兩個黑色小正方形的對稱中心，從而可知在原圖的右方與下方共加入 6 個白色小正方形後，如圖所示，即可成為中心對稱的圖案。



答案： 6 個

5. 已知 x 是整數且 $\sqrt{2017-99\sqrt{x}}$ 也是整數，則 x 的值是______________。

【參考解法】

由題目條件可以判斷出 $\sqrt{x}$ 必須是非負整數，且須使得 $2017-99\sqrt{x}$ 是完全平方數。由 $2017-99\sqrt{x}\geq 0$ 知 $\sqrt{x}\leq\dfrac{2017}{99}<21$，即 $\sqrt{x}$ 的可能值為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20，此時對應的 $2017-99\sqrt{x}$ 之值依序為 2017、1918、1819、1720、1621、1522、1423、1324、1225、1126、1027、928、829、730、631、532、433、334、235、136、37，其中僅當 $\sqrt{x}=8$ 時 $2017-99\sqrt{x}=1225$ 是完全平方數，故 $x=8^2=64$。

答案：64

6. 將 $\sqrt{1}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、…、$\sqrt{100}$ 等一百個數分成若干組，使得每組內的所有數之和都不超過 10。則至少要分成______________組。

【參考解法】

由於 $\sqrt{25}+\sqrt{26}>5+5=10$，故 $\sqrt{25}$、$\sqrt{26}$、$\sqrt{27}$、…、$\sqrt{100}$ 這 76 個數兩兩不能同組，因此至少需要 76 組。

另一方面，對任意 $n=1$、2、3、…、24，將 $\sqrt{25-n}$ 與 $\sqrt{25+n}$ 分為一組，剩餘每個數分為一組。由於 $(\sqrt{25+n}+\sqrt{25-n})^2=50+2\sqrt{25^2-n^2}<100$，故這樣的分組滿足要求，恰有 76 個組。綜上所述，至少要分成 76 組。

答案： 76 組

7. 有五個正整數排成一列，從第二個數起，每一個數都不小於前一個的兩倍。若已知這五個數之和是 2018，則最後一個數的最小可能值是______________。

【參考解法】

設最後一個數為 x，則前四個數依序至多分別為 $\frac{x}{16}$、$\frac{x}{8}$、$\frac{x}{4}$、$\frac{x}{2}$，故

$\frac{x}{16}+\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+x\geq 2018$，即 $x\geq\frac{2018\times16}{31}=1041\frac{17}{31}$，故 $x\geq1042$。

另一方面，將這五個數取為 65、130、260、521、1042 時滿足題目要求，故所求為 1042。

答案： 1042

8. 某交通分隊每天都安排分隊裡的四位義交同時到某路口指揮交通。經過 35 天後，該分隊的任兩位義交都曾經同時到此路口指揮交通恰兩次。此交通分隊總共有______________位義交。

【參考解法】

因每一天都有四位義交同時到某路口指揮交通，故對於同一天裡的這四位義交而言，共可配成 $\frac{4\times3}{2}=6$ 對義交組合同時到該路口指揮交通，所以經過 35 天後，總共有 $6\times35=210$ 對的義交組合同時到該路口指揮交通。另一方面，假設此交通分隊共有 n 位義交，則每一位義交都與其餘的 $n-1$ 位義交同時到該路口指揮交通恰兩次，故總共有 $\frac{n(n-1)}{2}\times2=n(n-1)$ 對義交組合同時到該路口指揮交通，即可得 $n(n-1)=210$，化簡得 $(n+14)(n-15)=0$，因此知 $n=15$。

答案： 15 位

9. 猜拳比賽為單循環賽，即每一位參賽者都被安排與其他每一位參賽者猜拳一次，但小華因為遲到而只能與若干位參賽者猜拳。如果在該猜拳比賽中沒有其他參賽者遲到且全部參賽者猜拳的總次數為 1009 次，則在該比賽中共有______________位參賽者沒有跟小華猜拳。

【參考解法】

設猜拳比賽中的參賽者總共有 n 位，則原安排猜拳的總次數為 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次。而除小華以外的其他 $n-1$ 位參賽者猜拳的總次數為 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 次，故可得

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}<1009<\frac{n(n-1)}{2}$$

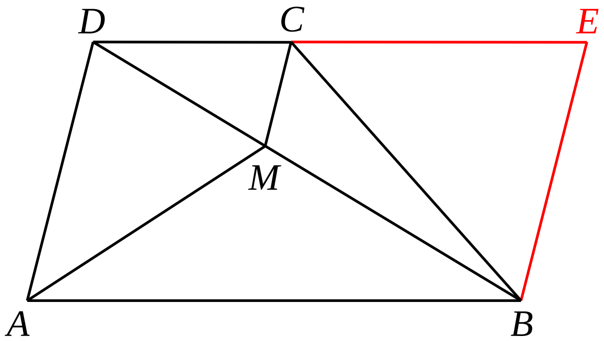
$$(n-1)(n-2)<2018<n(n-1)$$

而由 $44\times45=1980<2018<45\times46=2070$ 可判斷出 $n=46$。

因此猜拳比賽中除小華以外的其他 45 位參賽者猜拳的總次數為 $\frac{44\times45}{2}=990$ 次，故小華在該比賽中總共猜拳 $1009-990=19$ 場，即共 $45-19=26$ 位參賽者沒有跟小華猜拳。

答案： 26 位

10. 在梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB//CD$。在 BD 上有一點 M 使得 $CM//AD$，如圖所示。若四邊形 $AMCD$ 的面積為 168 cm^2、$ABCD$ 的面積為 420 cm^2，則三角形 ABM 的面積為________________ cm^2。

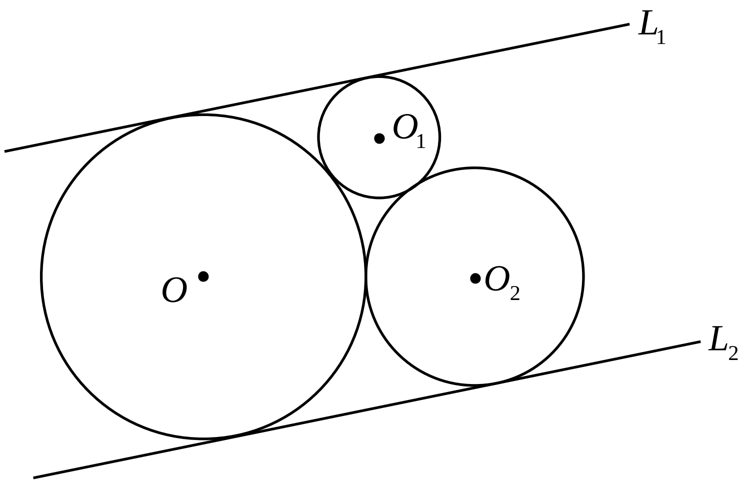


【參考解法】

取點 E 使得 $ABED$ 為平行四邊形。因四邊形 $AMCD$ 的面積為 168 cm^2，故四邊形 $AMCB$ 的面積為 $420-168=252\,\text{cm}^2$，因此 $DM:MB=168:252=2:3$ 且可推得 $CM:EB=2:5$。現令三角形 ADM 的面積為 $2x$，則三角形 ABD 的面積為 $5x$；再令三角形 CDM 的面積為 $4y$，則三角形 EDB 的面積為 $25y$。此時可得知 $5x=25y$，即 $x=5y$。再因為已知四邊形 $AMCD$ 的面積為 168 cm^2，故可得等式 $2x+4y=10y+4y=14y=168$，化簡得 $y=12$，即 $x=60$。故三角形 ABM 的面積為 $3x=180$ cm^2。

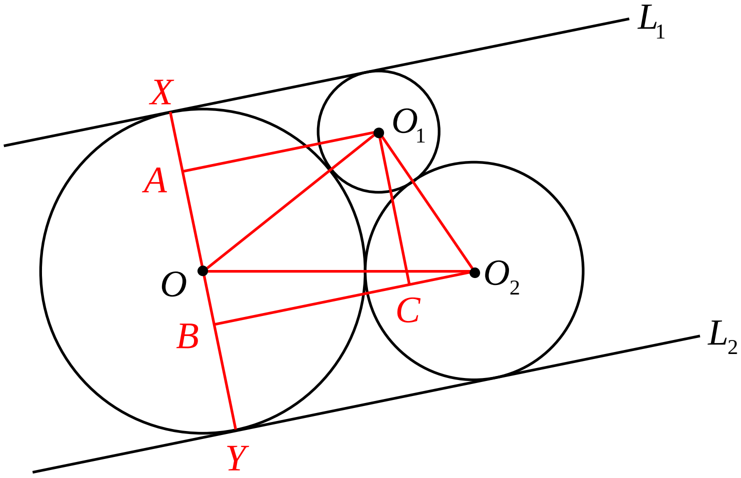
答案：180 cm^2

11. 圓 O_1 與圓 O 外切、圓 O_2 與圓 O 外切、圓 O_1 與圓 O_2 外切，而直線 L_1 為圓 O 與圓 O_1 的公切線、直線 L_2 為圓 O 與圓 O_2 的公切線，如圖所示。已知 L_1 與 L_2 平行，且圓 O 的半徑為 6 cm、圓 O_2 的半徑為 4 cm，則圓 O_1 的半徑為________________ cm。



【參考解法】

令點 X、Y 分別為圓 O 與 L_1、L_2 的切點並連接 XY。作在 XY 上取點 A、B 使得 $O_1A \perp XY$、$O_2B \perp XY$，再在 O_2B 取點 C 使得 $O_1C \perp O_2B$，如圖所示。



令圓 O_1 的半徑為 r，則知

$$O_1A = \sqrt{O_1O^2 - OA^2} = \sqrt{(6+r)^2 - (6-r)^2} = \sqrt{24r}$$

$$O_2B = \sqrt{O_2O^2 - OB^2} = \sqrt{(6+4)^2 - (6-4)^2} = \sqrt{96}$$

因此 $O_2C = \sqrt{96} - \sqrt{24r}$，而 $O_1C = AB = XY - XA - YB = 2\times 6 - r - 4 = 8 - r$，再由勾股定理即可得知

$$O_1O_2^2 = O_1C^2 + O_2C^2 = (8-r)^2 + (\sqrt{96} - \sqrt{24r})^2 = r^2 + 8r + 160 - 96\sqrt{r}$$

而 $O_1O_2 = 4 + r$，故可得等式

$$(4+r)^2 = r^2 + 8r + 160 - 96\sqrt{r}$$

化簡得 $\sqrt{r} = \dfrac{160-16}{96} = \dfrac{144}{96} = \dfrac{3}{2}$，即 $r = \dfrac{9}{4} = 2.25$。

答案：$\dfrac{9}{4} = 2.25$ cm

12. 已知 a 為小於 1000 的正整數。若 $a^3 + 95$ 為 96 的倍數，令滿足上述條件的 a 所有可能值之和為 S，則 S 之值為________________。

【參考解法】

由於 $a^3 + 95$ 為 96 的倍數，故 $a^3 + 95 - 96 = a^3 - 1$ 也是 96 的倍數。而

$$a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1) = (a-1)(a(a+1)+1) = (a-1)a(a+1) + (a-1)$$

且 $96 = 2^5 \times 3$。

(i) 因 $a^2 + a + 1$ 恆為奇數，故 2^5 必可整除 $a-1$；

(ii) 因 $(a-1)a(a+1)$ 為連續三個整數之乘積，故恆可被 3 整除，即 3 必可整除 $a-1$。

因此 96 必可整除 $a-1$，即 $a = 96k + 1$。

由 $a = 96k + 1 < 1000$ 知 $k = 0$、1、2、⋯、10，因此

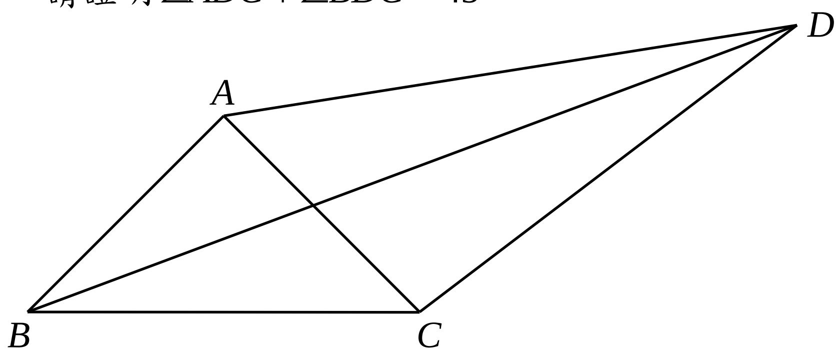
$$S = 1 + (96\times 1 + 1) + (96\times 2 + 1) + \cdots + (96\times 10 + 1) = 11 + 96\times 55 = 5291$$

答案：5291

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

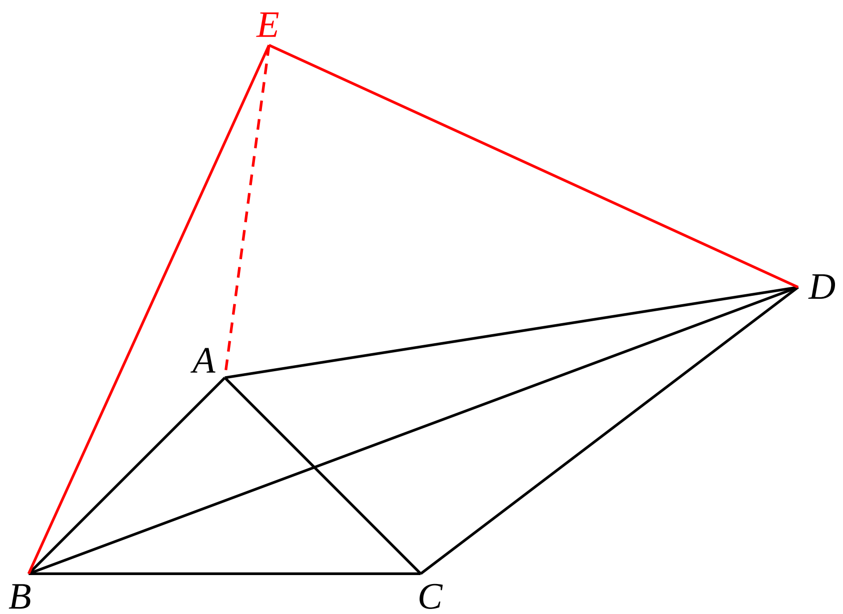
(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB = AC$，如下圖所示。平面上一點 D 滿足 $BD = \sqrt{2}AD$，請證明 $\angle ADC + \angle BDC = 45^\circ$。



【參考解法】

作等腰直角三角形 EBD，使得 $\angle BED = 90^\circ$ 且 E、C 在 BD 的兩側，如下圖所示。



由 $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}BE}{\sqrt{2}BA} = \dfrac{BE}{BA}$ 及 $\angle EBA = 45^\circ - \angle ABD = \angle DBC$ 知 $\triangle EBA \sim \triangle DBC$。（10 分）

因此 $\angle BDC = \angle BEA$。又 $DE = \dfrac{BD}{\sqrt{2}} = DA$，故 $\angle DEA = \angle DAE$，因此

$$\angle EDA = 180^\circ - 2\angle DEA = 2(90^\circ - \angle DEA) = 2\angle BEA = 2\angle BDC$$ 。（5 分）

故 $\angle ADC + \angle BDC = \angle ADB + 2\angle BDC = \angle ADB + \angle EDA = 45^\circ$。（5 分）

2. 已知 a、b、c、d 是正整數，使得$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$、$\frac{d}{c}$都是最簡分數，且$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}$的值也是整數。請證明$d\geq a-1$。

【參考解法】

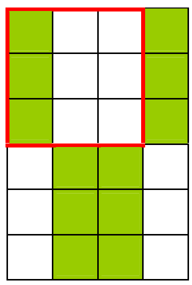
由$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$均為最簡分數知 b 與 a、c 均互質；由$\frac{c}{b}$、$\frac{d}{c}$均為最簡分數知 c 與 b、d 均互質（5 分）。由於$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}$是整數，故$ac(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c})=bc+ad+\frac{ac^2}{b}$也是整數，因此$\frac{ac^2}{b}$是整數。由於 b 與 a、c 均互質，故$b=1$（5 分）。且可得知$\frac{1}{a}+\frac{d}{c}$是整數，由於兩個數都是最簡分數，故$a=c$（5 分）。因此$\frac{d+1}{a}$是整數，即$d+1$是 a 的倍數，故$d+1\geq a$，即$d\geq a-1$（5 分）。

3. 有 6 條橫列、4 條直行的方格表裡有 24 個白色單位小方格，現欲將其中 12 個小方格塗上綠色使得每一條橫列都有 2 個綠色小方格、每一條直行都有 3 個綠色小方格。則共有______________種不同的塗色方法。

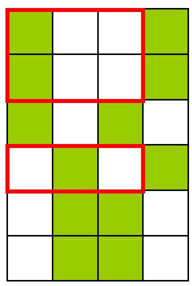
【參考解法】

首先觀察第一條直行。可知在這一條直行裡選擇 3 個小方格來塗上綠色的方式共有$C_3^6=20$種。（4 分）不失一般性，設這 3 個綠色小方格位於前三條橫列。接著觀察一個由三條橫列內前三條直行所構成的3×3表格，其中每一橫列都只有一個塗上綠色的小方格，此時第四條直行上對應的列之小方格一定都塗上綠色、另三條橫列與第四條直行對應小方格都必沒有塗色。有以下三種情況：

(i) 3×3表格內綠色小方格都在同一直行上。如右圖紅色方框所示。
此直行共有 3 種選擇，且此時表格外的另三條橫列之塗色方式也隨之確定。（4 分）

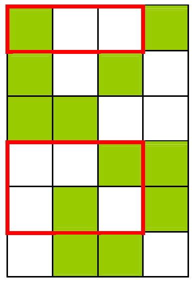


(ii) 3×3表格內二個綠色小方格在同一直行上、一個綠色小方格在另一直行上。如合併右圖紅色方框所示。
此時有二個綠色小方格的直行共有 3 種選擇，接著有一個綠色小方格的直行共有 2 種選擇，且這一條僅有一個綠色小方格的直行上共有 3 個方格可選擇塗綠，而另二個綠色方格也隨之決定。此時因表格內有一直行內沒有綠色小方格，故此直行在表格外的另三個方格必塗綠色；表格內有一直行內有二個綠色小方格，故此直行在表格外共有 3 種塗色方式，表格外其餘二個綠色小方格也隨之決定。故共有$3\times2\times3\times3=54$種。(4 分)



(iii) 3×3表格內三個綠色小方格都在不同直行上。如合併右圖紅色方框所示。

此時第一條直行共有 3 種選擇塗色方式、接著第二條直行共有 2 種選擇塗色方式，而第三條直行塗色方式也隨之決定。此時表格外的另三條橫列內前三條直行所構成的3×3表格，可視為有三個未塗色的小方格都在不同直行上，因此也有3×2種塗色方式。故共有$3\times2\times3\times2=36$種。(4 分)



因此總共有$20\times(3+54+36)=1860$種不同的塗色方法。(4 分)

答案：1860 種