

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

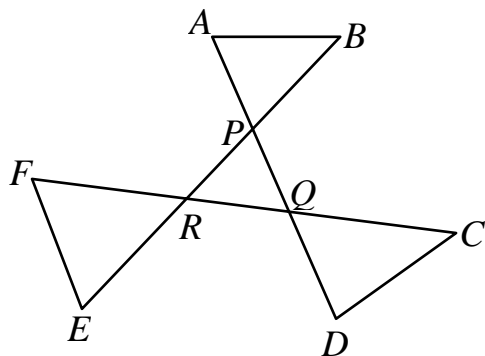
Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2012 小學數學競賽選拔賽初賽試題

第二試：應用題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分

1. 如圖所示，請問 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ 等於多少度？



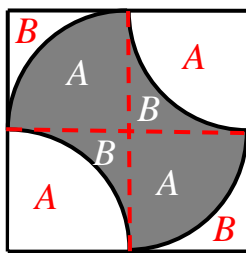
【解】

$$\begin{cases} \angle A + \angle B = \angle PQR + \angle PRQ \\ \angle C + \angle D = \angle RPQ + \angle PRQ \\ \angle E + \angle F = \angle PQR + \angle RPQ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 2(\angle PQR + \angle PRQ + \angle RPQ) = 360^\circ$$

答：360°

2. 下圖是一個邊長為 20 cm 的正方形，四段圓弧皆為以正方形邊長一半為半徑的四分之一弧。請問陰影部分面積為多少 cm^2 ？



【解】

如圖，分別連接對邊中點，則正方形被分成各四塊的 A、B 兩種形狀，且一塊 A 與一塊 B 可組成一個以原正方形邊長一半為邊長的小正方形，其面積為原正方形的四分之一，因此四塊陰影部分面積佔原正方形的二分之一，故陰影部分面積為 $20 \times 20 \div 2 = 200 \text{ cm}^2$ 。

答：200 cm^2

3. 有一個數列共有 2012 個數，它們是：1、1、2、3、5、8、…。此數列的前兩個數都是 1，從第三個數開始，每個數都是前兩個數的和。請問此數列共有幾個奇數？

【解】

若將此數列奇偶性依序寫出，可得：

奇、奇、偶、奇、奇、偶、奇、奇、偶、...

此為以「奇、奇、偶」循環出現。因 $2012=3\times 670+2$ ，故共有 $2\times 670+2=1342$ 個奇數。

答：1342 個

$$4. \text{ 計算：} \left(\frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} + \cdots + \frac{1}{2012}\right) \left(1 + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \cdots + \frac{1}{2012}\right) \\ - \left(1 + \frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} + \cdots + \frac{1}{2012}\right) \left(\frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \cdots + \frac{1}{2012}\right)$$

【解一】

令 $\frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \cdots + \frac{1}{2012} = a$ ，則原式可改寫為

$$a\left(1+a-\frac{1}{2000}\right) - (1+a)\left(a-\frac{1}{2000}\right) = a(1+a) - \frac{a}{2000} - a(1+a) + \frac{1+a}{2000} = \frac{1}{2000}。$$

【解二】

令 $\frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \cdots + \frac{1}{2012} = a$ 、 $\frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \cdots + \frac{1}{2012} = b$ ，則原式可改寫為 $a(1+b) - (1+a)b = a + ab - b - ab = a - b = \frac{1}{2000}$ 。

答： $\frac{1}{2000}$

5. 李媽媽將蘋果、橘子、草莓、桃子、蓮霧等五種水果分別放在編號為 1、2、3、4、5 的五個外觀完全相同但無法看到內部的盒子內，每個盒子恰放一種水果。甲、乙、丙、丁、戊五位小孩猜測每一個盒子內所放的水果如下：

甲：第 2 號盒放蓮霧、第 3 號盒放橘子；

乙：第 2 號盒放草莓、第 4 號盒放蘋果；

丙：第 1 號盒放蘋果、第 5 號盒放桃子；

丁：第 3 號盒放草莓、第 4 號盒放桃子；

戊：第 2 號盒放橘子、第 5 號盒放蓮霧。

打開盒子後，發現每一位小孩都恰猜對了一種，並且每一種水果都有人猜對。請問第幾號盒放蓮霧？

【解】

因第 1 號盒僅丙有猜測，故知第 1 號盒內必為蘋果；

因而可知乙猜測第 4 號盒放蘋果必錯誤，因此乙猜測第 2 號盒放草莓為正確的；

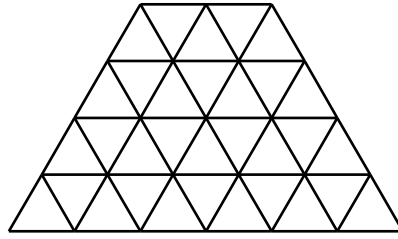
因而可知甲猜測第 2 號盒放蓮霧必錯誤，因此甲猜測第 3 號盒放橘子為正確的；

因而可知丁猜測第 3 號盒放草莓必錯誤，因此丁猜測第 4 號盒放桃子為正確的；

所以現可知第 5 號盒放蓮霧，此即為戊所猜測的，且他猜測第 2 號盒放橘子也不正確，滿足題意。

答：第 5 號盒

6. 下圖中所有的小三角形都是邊長相等的正三角形。請問圖中共可找出多少個正三角形？(包括不同大小、不同位置的正三角形)



【解】

令小正三角形的邊長為 1，則：

- (1) 邊為 4 的正三角形： 3 個；
(2) 邊為 3 的正三角形： 正立的正三角形共有 $4+3=7$ 個、倒立的正三角形共有 1 個，合計 8 個；
(3) 邊為 2 的正三角形： 正立的正三角形共有 $5+4+3=12$ 個、倒立的正三角形共有 $3+2+1=6$ 個，合計 18 個；
(4) 邊為 1 的正三角形： $5+7+9+11=32$ 個；
合計共 $3+8+18+32=61$ 個。

答：61 個

7. 在數 2012 後面補上三個數碼而組成一個七位數，且這個七位數能被 4、5、6 所整除。請問符合這些條件的七位數中，最大的數是什麼？

【解一】

因所得之七位數為 4 與 5 的倍數，故末二位數為 00、20、40、60 或 80。可令百位數為 a 。

若末二位數為 00，則 $2+0+1+2+a+0+0=5+a$ 必須為 3 的倍數，此時最大的七位數發生在 $a=7$ 時，即 2012700；

若末二位數為 20，則 $2+0+1+2+a+2+0=7+a$ 必須為 3 的倍數，此時最大的七位數發生在 $a=8$ 時，即 2012820；

若末二位數為 40，則 $2+0+1+2+a+4+0=9+a$ 必須為 3 的倍數，此時最大的七位數發生在 $a=9$ 時，即 2012940；

若末二位數為 60，則 $2+0+1+2+a+6+0=11+a$ 必須為 3 的倍數，此時最大的七位數發生在 $a=7$ 時，即 2012760；

若末二位數為 80，則 $2+0+1+2+a+8+0=13+a$ 必須為 3 的倍數，此時最大的七位數發生在 $a=8$ 時，即 2012880。

故所求之最大值為 2012940。

【解二】

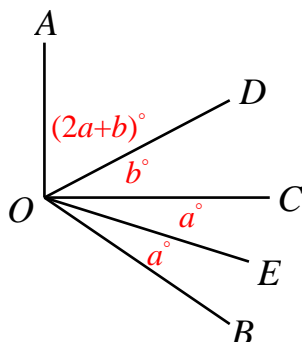
因所得之七位數為 4 與 5 的倍數，故末位數必定為 0，而十位數必為偶數。

要使此七位數最大，故可先假設百位數為 9，並令十位數為偶數 a ，此時可得知 $2+0+1+2+9+a+0=14+a$ 必須為 3 的倍數，僅 $a=4$ 可滿足。故所求為 2012940。

答：2012940

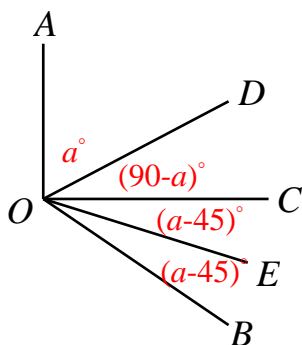
8. 在 $\angle AOB$ 中，已知 $OC \perp OA$ 且 OD 平分 $\angle AOB$ 、 OE 平分 $\angle COB$ ，如圖所示。
請問 $\angle DOE$ 為多少度？

【解一】



如圖所示，令 $\angle EOC = a^\circ$ 、 $\angle DOC = b^\circ$ ，則由 OD 平分 $\angle AOB$ 、 OE 平分 $\angle COB$ 可知 $\angle EOB = \angle EOC = a^\circ$ 、 $\angle DOA = \angle DOB = (2a+b)^\circ$ 以及 $\angle DOE = (a+b)^\circ$ 。
再由 $OC \perp OA$ 可得知 $\angle AOC = 90^\circ$ ，即 $2a+2b=90$ ，故知 $\angle DOE = (a+b)^\circ = 45^\circ$ 。

【解二】



如圖所示，令 $\angle AOD = a^\circ$ ，則 $\angle DOC = (90-a)^\circ$ ，且由 OD 平分 $\angle AOB$ 可知 $\angle AOB = 2a^\circ$ ，此時再由 $OC \perp OA$ 可知 $\angle COB = (2a-90)^\circ$ 。
因 OE 平分 $\angle COB$ ，可知 $\angle EOB = \angle EOC = (a-45)^\circ$ 。
故知 $\angle DOE = (90-a)^\circ + (a-45)^\circ = 45^\circ$ 。

答： 45°

9. 某市之汽車車牌號碼設計前二碼為英文字母，接著為一小橫槓，最後四碼為數字碼(例如 AB-1234，前二碼從 A、B、C、...、Z 等二十六個英文字母中任選二碼，但可重複；後四碼從 0、1、2、3、4、...、9 等十個數碼中任選四碼，但亦可重複)。由於車輛急速增加，原設計之車牌已經不敷使用，於是該市的監理單位增添了一種新型式的車牌，前四碼為數字碼，接著為一小橫槓，最後二碼為英文字母。有位聰明的小朋友發現車牌所使用的字型會讓有些新型式的車牌經旋轉 180° 後會與原型式的車牌混淆(例如 8601-HM 經旋轉 180° 後會變成 WH-1098)，這些會與原型式造成混淆的車牌必須剔除不能使用。已知在車牌上所使用的字型裡，0、1、8、H、I、N、O、S、X、Z 經旋轉 180° 後都不變，而 6、9、M、W 經旋轉 180° 後依序變為 9、6、W、M，而其他的數字或英文字母經旋轉 180° 後則可分辨。請問共有多少塊新型式的車牌必須被剔除？

【解】

可知英文字母旋轉 180° 後仍為英文字母的共有 9 個、數碼旋轉 180° 後仍為數碼的共有 5 個。因此共有 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 9 \times 9 = 50625$ 塊新形式的車牌必須被剔除。

答：50625 塊

10. 小明與小英玩電腦遊戲，遊戲的規則是：小明要在一個 4×4 方格表內放置地雷，每一個小方格內至多只能放一枚地雷；小英則每次可以任選方格表內的 2 行與 2 列來掃除上面所有的地雷。請問小明至少要放置多少枚地雷，才能保證小英無法一次就將方格表內所有地雷掃除乾淨？

【解】

可知若小明只安放少於或等於 4 枚地雷，則明顯小英可以一次掃除；

若小明安放 5 枚地雷，則由鴿籠原理知必至少有一行安放了 2 枚地雷，令其為 A 行，則小英若掃除 A 行，則至多再掃除 3 枚地雷即可，而此可以透過掃除一行與二列而一次掃除；

若小明安放 6 枚地雷，則由知必至少有一行安放了 3 枚地雷或是有二行各安放了 2 枚地雷，則小英可以透過掃除二行而至少除去 4 枚地雷，因此至多再掃除 2 枚地雷即可，而此可以透過掃除二列而一次掃除。

因此小明至少需安放 7 枚地雷，如下方式：

⊙	⊙		
	⊙	⊙	
⊙		⊙	
			⊙

答：7 枚

11. 已知 A 船隊比 B 船隊的貨船數少 8 艘。現某公司有 500 箱大小、重量皆相同的貨物要利用船運，若全用 A 船隊運送，每艘船運送 20 箱，則船數不夠；每艘船運送 22 箱，則會有船沒有放滿 22 箱。又若全請 B 船隊運送，每艘船運送 16 箱，則船數不夠；每艘船運送 20 箱，則會有船沒有放滿 20 箱。請問 A 船隊有多少艘船？

【解】

若這 500 份貨物全由 A 船隊運送，每艘船運送 20 箱時，則船數不夠，故知 A

船隊的船數少於 $\frac{500}{20} = 25$ 艘；而每艘船運送 22 箱，則會有船沒有放滿 22 箱，故

由 $\frac{500}{22} = 22\frac{8}{11}$ 知 A 船隊的船數至少有 $22+1=23$ 艘。因此 B 船隊至少有 $23+8=31$ 艘，且少於 $25+8=33$ 艘。

若這 500 箱貨物全由 B 船隊運送，每艘船運送 16 箱時，則船數不夠，故由

$\frac{500}{16} = 31\frac{1}{4}$ 知 B 船隊的船數少於 $31+1=32$ 艘，故可以得知 B 船隊的船數恰為 31

艘，即 A 船隊有 23 艘船。

答：23 艘

12. 小明家的電話號碼原為六位數，因號碼不夠用，電信公司在所有電話號碼的首位數與第二位數之間加上一個數碼 1 而成為一個七位數的電話號碼。數年後，電信公司發現號碼仍不敷使用，因此再將所有電話號碼的首位數前加上一個數碼 2 而成為一個八位數的電話號碼。小明發現經過這兩次更改後，家中最新的八位數電話號碼為原先六位數電話號碼的 97 倍。請問小明家最新的八位數電話號碼是什麼？

【解一】

可知小明家的電話號碼最後五位數皆未改變，因此可令小明家原先的六位數電話號碼之末五位數為 a 、首位數為 b 。此時由題意可知

$$97 \times (a + b \times 10^5) = 2 \times 10^7 + b \times 10^6 + 1 \times 10^5 + a$$

$$20100000 = 8700000b + 96a$$

$$a = \frac{20100000 - 8700000b}{96} = 209375 - 90625b$$

因 a 為五位數，故知 $10000 \leq a \leq 99999$ ，即

$$10000 \leq 209375 - 90625b \leq 99999$$

$$-199375 \leq -90625b \leq -109376$$

$$\frac{199375}{90625} = 2\frac{18125}{90625} \geq b \geq \frac{109376}{90625} > 1$$

可知 $b=2$ ，因此 $a=28125$ ，所以小明家最新的八位數電話號碼是 22128125。

【解二】

可知小明家的電話號碼最後五位數皆未改變，因此可令小明家原先的六位數電話號碼之末五位數為 a 、首位數為 b 。此時由題意可知

$$97 \times (a + b \times 10^5) = 2 \times 10^7 + b \times 10^6 + 1 \times 10^5 + a$$

$$20100000 = 8700000b + 96a$$

$$b = \frac{20100000 - 96a}{8700000} = 2 + \frac{2700000 - 96a}{8700000}$$

因 a 為五位數，故知

$$-1 < \frac{2700000 - 9600000}{8700000} = \frac{-6900000}{8700000} < \frac{2700000 - 96a}{8700000} < \frac{2700000}{8700000} < 1,$$

再因 b 為整數，故 $\frac{2700000 - 96a}{8700000} = 0$ ，即 $96a = 2700000$ ，故 $a=28125$ 、 $b=2$ ，所

以小明家最新的八位數電話號碼是 22128125。

【解三】

可令小明家原先的六位數電話號碼為 \overline{abcdef} ，則新的八位數電話號碼為 $\overline{2a1bcdef}$ 且知 $\overline{2a1bcdef} = \overline{abcdef} \times 97$ 。此時可將 $\overline{2a1bcdef}$ 視為被除數、97 視為除數而 \overline{abcdef} 視為商，則利用長除法可得部分除式如下：

$$\begin{array}{r} \overline{a b c d e f} \\ 97 \overline{) 2 a 1 b c d e f} \end{array}$$

即可知 $97 \times a$ 的首位數為 1 或 2，因此 $a=2$ 或 3。

若 $a=3$ ，則 $97 \times a = 97 \times 3 = 291 > \overline{2a1} = 231$ ，因此 $a=2$ ，此時可得部分除式如下：

$$\begin{array}{r} \overline{2bcdef} \\ 97 \overline{)221bcdef} \\ \underline{194} \\ 27b \end{array}$$

故知 $\overline{27b} \geq 97 \times b > \overline{17b}$ ，因此 $b=2$ ，此時可得部分除式如下：

$$\begin{array}{r} \overline{22cdef} \\ 97 \overline{)2212cdef} \\ \underline{194} \\ 272 \\ \underline{194} \\ 78c \end{array}$$

故知 $\overline{78c} \geq 97 \times c > \overline{68c}$ ，因此 $c=8$ 。此時可得部分除式如下：

$$\begin{array}{r} \overline{228def} \\ 97 \overline{)22128def} \\ \underline{194} \\ 272 \\ \underline{194} \\ 788 \\ \underline{776} \\ 12d \end{array}$$

故知 $\overline{12d} \geq 97 \times d > \overline{2d}$ ，因此 $d=1$ 。此時可得部分除式如下：

$$\begin{array}{r} \overline{2281ef} \\ 97 \overline{)221281ef} \\ \underline{194} \\ 272 \\ \underline{194} \\ 788 \\ \underline{776} \\ 121 \\ \underline{97} \\ 24e \end{array}$$

故知 $\overline{24e} \geq 97 \times e > \overline{14e}$ ，因此 $e=2$ 。此時可得部分除式如下：

$$\begin{array}{r} \overline{22812f} \\ 97 \overline{)2212812f} \\ \underline{194} \\ 272 \\ \underline{194} \\ 788 \\ \underline{776} \\ 121 \\ \underline{97} \\ 242 \\ \underline{194} \\ 48f \end{array}$$

故知 $\overline{48f} = 97 \times f$ ，因此 $f=5$ 。此時即可得 $\overline{22128125} = \overline{228125} \times 97$ ，所以小明家最新的八位數電話號碼是 22128125。

答：22128125