

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

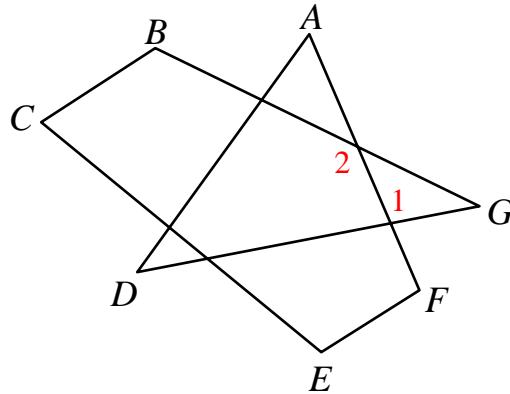
Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2012 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第一試：應用題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 如圖所示，請問 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$ 等於多少度？



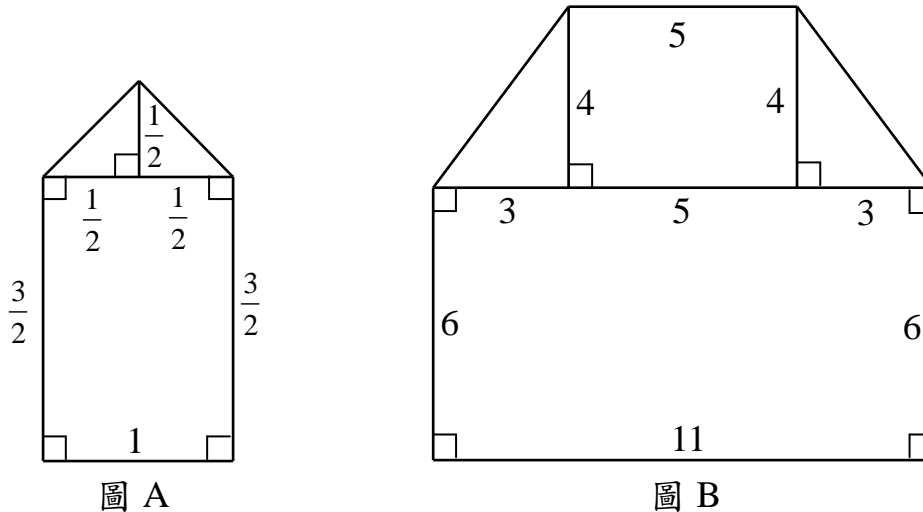
【解】

如圖，可知 $\angle A + \angle D = \angle 1$ ，故 $\angle 2 = \angle G + \angle 1 = \angle A + \angle D + \angle G$ 。

因此 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G = \angle B + \angle C + \angle E + \angle F + \angle 2$ ，此即為五邊形的內角和，其值為 540° 。

答： 540°

2. 以下二圖中，所有水平線段或鉛直線段旁的數字皆為該線段的長度(圖形並未精準繪出)。請問圖 B 之面積為圖 A 之面積的幾倍？



【解】

可知 圖 A 的面積為 $\frac{3}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ 、

圖 B 的面積為 $6 \times 11 + \frac{1}{2} \times (5 + 11) \times 4 = 66 + 32 = 98$ ，

因此圖 B 之面積為圖 A 之面積的 $98 \div \frac{7}{4} = 56$ 倍。

答：56 倍

3. 有一種角色扮演的電腦連線遊戲，每一位玩家都有四位不同的戰士，玩家與玩家間兩人對戰時，必須從自己所擁有的四位戰士中自己挑選出三位戰士來對抗。小丁有一次在玩這個遊戲時，他出戰最多的戰士共參加 59 場(其他的戰士都比他少)、出戰最少者共參加了 55 場(其他的戰士都比他多)、其中有一位戰士共參加 58 場。請問小丁的另一位戰士共出戰了幾場？

【解】

可知小丁的四位戰士的總參賽場數最多等於 $59+55+58+58=230$ 場；最少場數等於 $59+55+58+56=228$ 場。因每一場需派出三位大將與他人對戰，因此四位戰士的總參賽場數需為 3 的倍數，故知四位戰士的總參賽場數為 228 場，即小丁的另一位戰士共參加 $228-59-55-58=56$ 場。

答：56 場

4. 若一個正整數可以寫成 $2^n - 1$ 的形式就稱為梅森數(Mersenne numbers)，例如 $15 = 2^4 - 1$ ；若是質數可以寫成 $2^n - 1$ 的形式就稱為梅森質數(Mersenne prime numbers)，例如 $3 = 2^2 - 1$ 、 $7 = 2^3 - 1$ 。這是根據 17 世紀法國數學家梅森(Marin Mersenne)所命名的，目前所發現的最大質數 $2^{43112609} - 1$ 便是一個梅森質數，它是一個 12978189 位數。請問此質數的末二位數是什麼？

【解】

若將 1、3、7 視為 01、03、07，則將 $2^n - 1$ 的末二位數從 $n=1$ 開始依序列出如下：01、03、07、15、31、63、27、55、11、23、47、97、91、83、67、35、71、43、87、75、51、03、07、15、...

可發現若不考慮第一項，此為一個以 03、07、15、31、63、27、55、11、23、47、97、91、83、67、35、71、43、87、75、51 這 20 個數循環出現的數列。因 $43112609 - 1 = 43112608$ 除以 20 後所得之餘數為 8，故知 $2^{43112609} - 1$ 的末二位數為此 20 個數的第 8 個數，即 11。

答：11

5. 在各個數碼皆不相同的十位數中，請問可被 11111 整除的最大數是什麼？

【解一】

因要求出滿足題意的最大數，故從 9876543210 開始考慮。

可知 $9876543210 = 11111 \times 888897 + 8643$ ，故不超過 9876543210 且為 11111 的倍數之最大數為 $11111 \times 888897 = 9876534567$ ，此數有數碼重複，不合題意；

下一數為 $9876534567 - 11111 = 9876523456$ ，此數有數碼重複，不合題意；

下一數為 $9876523456 - 11111 = 9876512345$ ，此數有數碼重複，不合題意；

下一數為 $9876512345 - 11111 = 9876501234 = 11111 \times 888894$ ，此數滿足題意。

故知所求為 9876501234。

【解二】

因 11111 為五位數，故可令前五位數為 98765、後五位數為 $abcde$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 、 e 為小於 5 的不同數碼，即此滿足題意之最大數為 $98765abcde$ 。由長除法可得以下算式：

$$\begin{array}{r}
 \overline{8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 9 \ N} \\
 11111 \overline{)98765 \ a \ b \ c \ d \ e} \\
 \underline{88888} \\
 9877 \ a \\
 \underline{8888 \ 8} \\
 988(2+a) \ b \\
 \underline{888 \ 8 \ 8} \\
 99(3+a)(2+b) \ c \\
 \underline{88 \ 8 \ 8 \ 8} \\
 10(4+a)(3+b)(2+c) \ d \\
 \underline{9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9} \\
 (4+a)(3+b)(2+c)(1+d) \ e
 \end{array}$$

故知 $4+a=3+b=2+c=1+d=e$ ，即 $a、b、c、d、e$ 為連續的正整數，故知 $a=0、b=1、c=2、d=3、e=4$ 。因此所求為 9876501234。

【解三】

令 $\overline{ABCDEFGHIJ}$ 為各個數碼皆不相同且為 11111 的倍數的十位數。可知其數碼和為 $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ 是 9 的倍數，因此 $\overline{ABCDEFGHIJ}$ 也是 9 的倍數。再因 9 與 11111 互質，故知 $\overline{ABCDEFGHIJ}$ 是 99999 的倍數。因 $\overline{ABCDEFGHIJ} = 10^5 \times \overline{ABCDE} + \overline{FGHIJ} = 99999 \times \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{FGHIJ}$ ，故 $\overline{ABCDE} + \overline{FGHIJ}$ 是 99999 的倍數，即 $\overline{ABCDE} + \overline{FGHIJ} = 99999$ ，故可得知

$$A + F = B + G = C + H = D + I = E + J = 9$$

因要求出最大數，故可令 $\overline{ABCDE} = 98765$ ，此時 $\overline{FGHIJ} = 01234$ ，即所求為 9876501234。

答：9876501234

6. 某科技公司徵才，所有應徵者的統計資料顯示有三分之一是男性、二分之一是已婚、九位女性應徵者未婚及五位男性應徵者已婚。請問總共有多少位應徵者？

【解】

可知已婚人數與未婚人數一樣多，因此已婚的女性比未婚的男性多 $9-5=4$ 位，故可知女性的應徵者比男性的應徵者多 $4+4=8$ 位。因三分之一為男性的應徵者、三分之二為女性的應徵者，他們相差總應徵人數的三分之一，故共 24 位應徵者。

答：24 位

	已婚	未婚
女		男
男	5	女 9

7. 某捷運站裡的一座電扶梯以勻速由下往上行駛，小明一走上這座行駛中的電扶梯時便每 1 秒向上走 2 個階梯、而小強一走上這座行駛中的電扶梯時便以每 3 秒向上走 2 個階梯，最後小明花了 32 秒走出這座電扶梯、小強則花了 48 秒才走出來。若這座電扶梯完全靜止時，最下面一層階梯恰與樓地板在同一水平面上、最上面一層階梯也恰與上一層樓地板在同一水平面上，請問這座電扶梯完全靜止時可以看到幾個階梯？

【解一】

在整個行程中，小明共向上走 $32 \times 2 = 64$ 個階梯，小強共向上走 $48 \div 3 \times 2 = 32$ 個階梯，他們相差的階梯數 $64 - 32 = 32$ 等於電扶梯行駛 $48 - 32 = 16$ 秒的階梯數，即電扶梯由下往上的速度為 16 秒上升 32 個階梯，故知在小明行走的 32 秒間，電扶梯共上升了 $32 \times 2 = 64$ 個階梯，因此這座電扶梯在完全靜止時可看到 $64 + 64 = 128$ 個階梯。

【解二】

可設電扶梯由下往上的速度為每 1 秒上升 x 個階梯，則由階梯數固定可知

$$32(x + 2) = 48(x + \frac{2}{3})$$

$$32x + 64 = 48x + 32$$

$$32 = 16x$$

$$x = 2$$

因此這座電扶梯在完全靜止時可看到 $32 \times (2 + 2) = 128$ 個階梯。

答：128 個

8. 已知四位數 \overline{abcd} 是 22 的倍數，且滿足 $b+c=a$ 、 \overline{bc} 為二位數的完全平方數。請問這個四位數是什麼？

【解】

可知 d 為偶數且 \overline{abcd} 為 11 的倍數，故知 $a+c$ 與 $b+d$ 的差為 11 的倍數。

由 \overline{bc} 為完全平方數可知 \overline{bc} 僅可為 16、25、36 或 81 (49, 64 的數碼和為二位數，故不合)，即 \overline{abcd} 可能為 $\overline{716d}$ 、 $\overline{725d}$ 、 $\overline{936d}$ 或 $\overline{981d}$ 。

若 \overline{abcd} 為 $\overline{716d}$ ，則 $d=1$ 才能使 $a+c$ 與 $b+d$ 的差為 11 的倍數，但為奇數不合；

若 \overline{abcd} 為 $\overline{725d}$ ，則不存在數碼 d 使得 $a+c$ 與 $b+d$ 的差為 11 的倍數；

若 \overline{abcd} 為 $\overline{936d}$ ，則 $d=1$ 才能使 $a+c$ 與 $b+d$ 的差為 11 的倍數，但為奇數不合；

若 \overline{abcd} 為 $\overline{981d}$ ，則 $d=2$ 才能使 $a+c$ 與 $b+d$ 的差為 11 的倍數，即 \overline{abcd} 為 9812。故所求為 9812。

答：9812

9. 某國國防部大廈為一個正五邊形 $ABCDE$ ，其外部周長為 4000 m。甲、乙兩位士兵分別從 A 、 C 兩點同時出發以 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow \dots$ 的方向繞著大廈巡邏，甲士兵的速度為每分鐘 100 m、乙士兵的速度為每分鐘 92 m。若兩人中途皆未休息且以勻速前進，請問從出發後要經過多少分鐘兩位士兵才會第一次開始在同一條邊上巡邏？

【解】

可知此大廈每邊長 $4000 \div 5 = 800$ m，此時由兩位士兵的行進方向知可看成是甲士兵落後乙士兵 $800 \times 2 = 1600$ m。

因甲士兵的速度比乙士兵快，故知兩人第一次開始在同一條邊上巡邏時必是甲士兵恰巡邏至某一頂點上且兩人距離小於 800 m。此時可知甲士兵必至少比乙士兵多走了 $1600 - 800 = 800$ m，且由甲士兵的速度為每分鐘 100 m 觀察出甲士兵恰巡邏至頂點所花費的時間必為 $800 \div 100 = 8$ 的倍數。故可令甲士兵恰巡邏至頂點所花費的時間為 $8a$ ，其中 a 為正整數，則知甲士兵至少比乙士兵多走 800 m

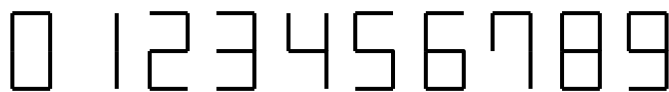
且恰位於頂點上時有 $8a \times (100 - 92) \geq 800$ ，即 $a \geq \frac{100}{8} = 12\frac{1}{2}$ 。因兩人第一次開始

在同一條邊上巡邏時即是 a 最小值發生時，故 $a = 13$ ，即要經過 $8 \times 13 = 104$ 分鐘後兩位士兵才會第一次開始在同一條邊上巡邏。

答：104 分鐘

10. 調查局破獲一個經濟犯罪集團。

調查人員發現這個集團首腦將所



有的往來帳冊及資料全都放在一個鐵櫃內，而這個鐵櫃上有一個號碼鎖，這個號碼鎖的數碼形式如圖所示。必須輸入正確的密碼才可以打開鐵櫃，而只有集團首腦與他的秘書知道密碼，但這兩人始終不肯透露。在調查人員訊問中，他的秘書不小心透露了密碼是一組五位數；而集團首腦也在無意中說出了整組密碼經過旋轉 180° 後其數值仍然不變，例如 808 是可能的密碼，而 169、347 則不可能是密碼。若調查人員沒有發現其他的線索，請問藉由這兩個訊息，最少需要測試多少組密碼，才能保證將此鐵櫃打開？

【解】

觀察這些形式的數碼，可知旋轉 180° 後數值仍不改變的數碼有 0、1、2、5、8 這五個數碼、旋轉 180° 後數碼 6 變成數碼 9、數碼 9 變成數碼 6。

此組密碼旋轉 180° 後數值仍然不變，知個位數、十位數分別由萬位數、千位數決定，而由此密碼為五位數知萬位數不可為 0，故萬位數數碼有 1、2、5、6、8、9 等六種可能。千位數數碼有 0、1、2、5、6、8、9 等七種可能。百位數碼旋轉 180° 後是數值仍不改變的數碼，故百位數有 0、1、2、5、8 等五種選擇。

因此共有 $6 \times 7 \times 5 = 210$ 個五位數可以設定為密碼，即最少需要測試 210 組密碼才能保證將此鐵櫃打開。

答：210 組

11. 在 $\triangle ABC$ 中，直線 l 是 $\angle C$ 的外角平分線，過 AB 邊的

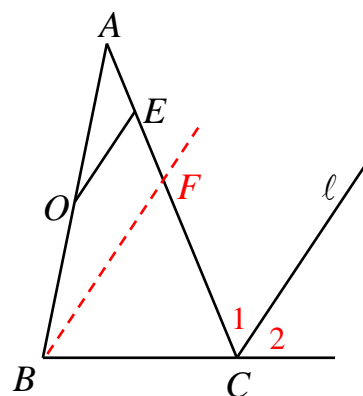
中點 O 作平行於 l 的直線交 AC 邊於點 E ，如圖所示。

已知 $AC = 14$ cm、 $BC = 8$ cm，請問 CE 的長為多少 cm？

【解一】

過 B 點作 $BF \parallel OE \parallel l$ ，交 AC 於 F 點。

因 $BF \parallel l$ ，故 $\angle FBC = \angle 2 = \angle 1 = \angle BFC$ ，因此 $CF = BC = 8$ ；



因 O 為 AB 中點，故知 E 為 AF 中點，即 $AE=EF=\frac{1}{2}(14-8)=3$ 。

故 $CE=CF+EF=8+3=11$ cm。

【解二】

令 $\angle ACG$ 為 $\angle ACB$ 的外角，且在 AC 邊上取一點 F 使得 $CF=BC=8$ 。此時可知 $\angle 3=\angle 4$ 。

因 $\angle FCG$ 為 $\angle FCB$ 的外角，故知 $\angle FCG=\angle 3+\angle 4$ ，即

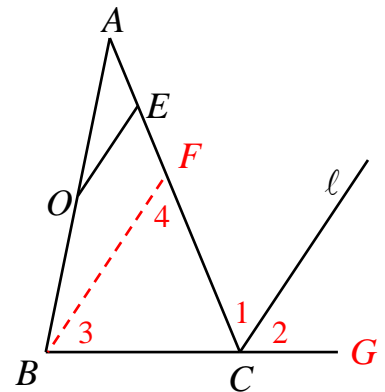
$$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$$

因此可得 $2\angle 1=2\angle 4$ ，此即 $\angle 1=\angle 4$ ，故知 $BF\parallel OE$ ；

因 O 為 AB 中點，故知 E 為 AF 中點；

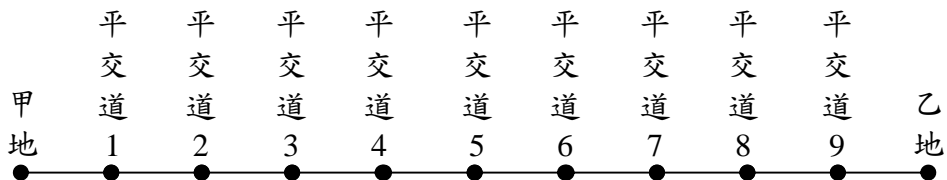
因 $AF=AC-FC=14-8=6$ ，所以 $EF=\frac{1}{2}\times 6=3$ ，

故 $CE=CF+EF=8+3=11$ cm。



答：11 cm

12. 甲乙兩地之間鐵路全長 300 km，且每隔 30 km 設置一個平交道，如圖所示。由早上 6:00 開始，從甲地每隔 5 分鐘發出一列火車直達乙地，火車以每小時 60 km 的勻速度行駛。而在早上 8:30 從甲地會同時發出一列特快車，以每小時 100 km 的勻速駛向乙地，此列特快車於早上 10 時之後，在某兩個相鄰的平交道間(不含在平交道處)共追過三列火車。請問在此時此列特快車總共已經追過多少列火車？(同時出發的火車不計算在內)



【解一】

因每隔 5 分鐘發出一列火車，因此兩列火車間相差 $60 \times \frac{5}{60} = 5$ 公里，也由此可知

特快車每隔 $\frac{5}{100-60} = \frac{1}{8}$ 小時便追過一列火車。即特快車每行駛 12.5 公里便追過

一列火車。故它在距離甲地為以下距離時便追過一列火車：

12.5、25、37.5、50、62.5、75、87.5、100、112.5、125、137.5、150、162.5、175、187.5、200、212.5、225、237.5、250、262.5、275、287.5。

因平交道處距離甲地依序為 30、60、90、120、150、180、210、240、270，可知在平交道 2 與 3 間，及平交道 7 與 8 間皆會追過三列火車。但因特快車在早上 10 時恰通過平交道 5，故知此為平交道 7 與 8 間，因此共追過 19 列火車。

【解二】

因每隔 5 分鐘發出一列火車，因此兩列火車間相差 $60 \times \frac{5}{60} = 5$ 公里，也由此可知

特快車每隔 $\frac{5}{100-60} = \frac{1}{8}$ 小時便追過一列火車。若假設特快車已追過 x 列火車，且是在平交道 y 與平交道 $y+1$ 間追過的，則由行駛距離知

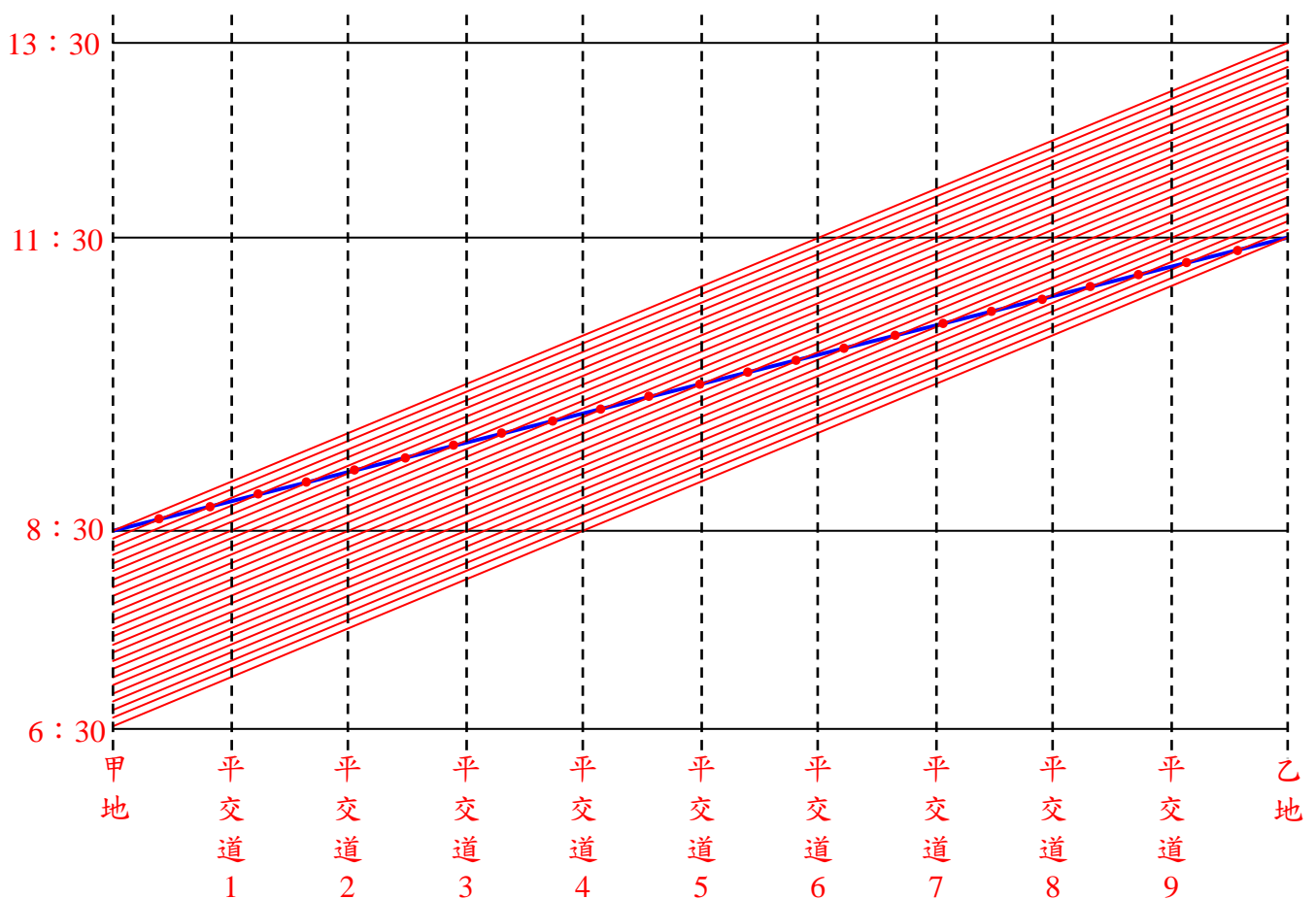
$$\begin{cases} 100 \times \frac{1}{8}(x-2) > 30y \\ 100 \times \frac{1}{8}x < 30(y+1) \end{cases} \Rightarrow 30y + 25 < \frac{25}{2}x < 30y + 30 \Rightarrow 12y + 10 < 5x < 12y + 12$$

因 x 、 y 都是正整數，且 $y \leq 9$ ，故 $5x = 12y + 11$ ，即 $x = \frac{12y+11}{5} = 2y + 2 + \frac{2y+1}{5}$ ，

因此 $y=2$ 、 $x=7$ 或 $y=7$ 、 $x=19$ ，所以可得知在平交道 2 與 3 間，及平交道 7 與 8 間皆會追過三列火車。但因特快車是在早上 10 時恰通過平交道 5，故知此為平交道 7 與 8 間，且追過 19 列火車。

【解三】

設 y 軸為時間軸、 x 軸為距離軸，則可繪出如下圖的示意圖，其中藍線為特快車、紅線為火車、左端與右端虛線分別為甲地與乙地位置、中間虛線為平交道位置



則紅點即為特快車追上火車的時間與位置。由圖可知在平交道 2 與 3 間，及平交道 7 與 8 間皆會追過三列火車。但因特快車在早上 10 時恰通過平交道 5，故知此為平交道 7 與 8 間，因此共有 19 個紅點，即追過 19 列火車。

答：19 列