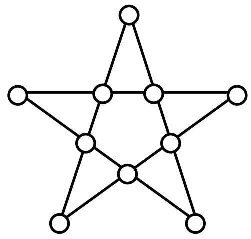
2012 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

1. 將圖中的每一個圓圈都任意塗成黑色或白色之一。請問是否存在一種塗法使得在同一條直線上的黑圓圈數都是奇數？若存在，請將您所找到的塗法直接畫在圖中；若不存在，請完整寫出您的理由。

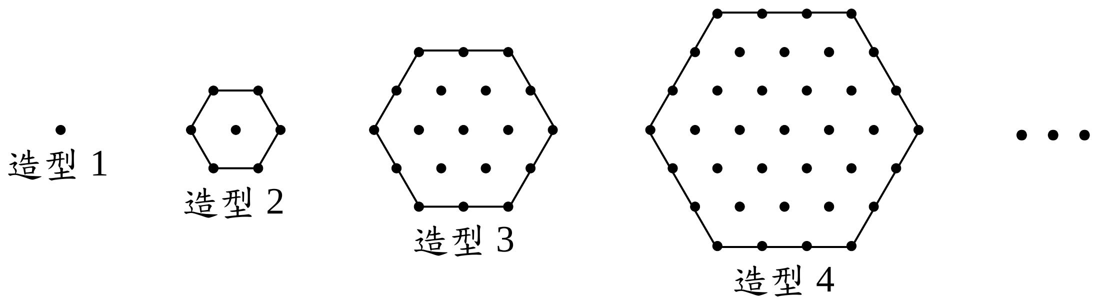


【解】

若可以讓同一條直線上的黑圓圈數都是奇數，因共有五條直線，故將這些黑圓圈數相加後仍得到奇數。

但從另一個角度來看，因每一個圓圈都在兩條直線上，因此相加時，每一個黑圓圈都被算了 2 次，故相加後的總數應為偶數，矛盾，因此這種塗法不存在。

2. 用圓點依序排列出以下造型：



(1) 造型 1 共有 1 個圓點；造型 2 共有 7 個圓點；造型 3 共有 19 個圓點；……。請問造型 100 共有多少個圓點？(10 分)

(2) 在造型 100 最中心的圓點上放 100 個硬幣；由中心向外第一層的正六邊形每一個圓點上都放置 99 個硬幣；由中心向外第二層的正六邊形每一個圓點上都放置 98 個硬幣；由中心向外第三層的正六邊形每一個圓點上都放置 97 個硬幣；…，直到最外層的正六邊形每一個圓點上都放置 1 個硬幣，而做成一個正六邊形塔。請問這個正六邊形塔共有多少個硬幣？(15 分)

【解一】

(1) 觀察規律，可知當 $n>1$ 時，造型 n 最外圍的圓點數為 6 個頂點與每一邊上的圓點數(不含頂點上的圓點)之和，即

$$6+6(n-2)=6n-6=6(n-1)。$$

因此造型 100 的圓點數為

$$\begin{aligned}1+6\times(2-1)+6\times(3-1)+6\times(4-1)+\cdots+6\times(100-1)&=1+6\times(1+2+3+\cdots+99)\\&=1+6\times4950\\&=29701\end{aligned}$$

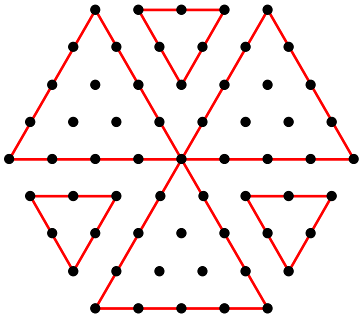
(2) 觀察規律，可知當 $n>1$ 時，造型 n 最外圍的圓點數為 $6n-6$。

因此六角塔的硬幣數為

$$100\times1+99\times6\times(2-1)+98\times6\times(3-1)+97\times6\times(4-1)+\cdots+1\times6\times(100-1)$$
$$=100+6\times(99\times1+98\times2+97\times3+\cdots+1\times99)$$
$$=100+6\times(99\times(100-99)+98\times(100-98)+97\times(100-97)+\cdots+1\times(100-1))$$
$$=100+6\times100\times(99+98+97+\cdots+1)-6\times(99\times99+98\times98+97\times97+\cdots+1\times1)$$
$$=100+6\times100\times\frac{(99+1)\times99}{2}-6\times\frac{99\times(99+1)\times(2\times99+1)}{6}$$
$$=100+2970000-1970100$$
$$=1000000$$

【解二】

(1) 觀察規律，可知當 $n>1$ 時，造型 n 可看成三組有同一個頂點且邊長有 n 個點的三角形與三組沒有相同頂點且邊長有 $n-2$ 個點的三角形：



造型 n

因此造型 n 的圓點數為

$$3\times(1+2+3+\cdots+n)-2+3\times(1+2+3+\cdots+(n-2))=\frac{3n(n+1)+3(n-1)(n-2)}{2}-2$$
$$=\frac{6n^2-6n+6}{2}-2$$
$$=3n^2-3n+1$$

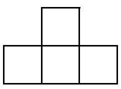
因此造型 100 的圓點數為 $3\times100^2-3\times100+1=29701$

(2) 觀察規律，一層一層由下往上看，可知正六邊形塔為以造型 n 當最底層，在同一個中心上依序往上放造型 $n-1$、造型 $n-2$、…、造型 2、造型 1。
因此六角塔的硬幣數即為造型 1 至造型 n 的所有圓點數和，即為

$$3\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-3\times(1+2+3+\cdots+n)+n$$
$$=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)+2n}{2}$$
$$=n^3$$

故以造型 100 為底層之正六邊形塔的硬幣數為 $100^3=1000000$。

答：(1) 29701 個 (2) 1000000 個

3. 請問在 8×8 的方格表內，至少要塗上多少種顏色(每個小方格塗一種顏色)，才能使得一片  型之四方塊無論如何沿格線放入方格表，它所蓋住的四個小方格之顏色均不相同？(您必須在右表中給出塗色的方法，並證明所

塗顏色之數量無法再少。)

【解】

可知需塗 4 種顏色以上。若塗 4 種顏色,考慮方格表內的一個 3×3 的小方格表。以數字 1、2、3、4 分別代表四種不同的顏色,則放一個指定的型式四方塊於右圖的位置時,可塗色如右:

	4	
1	2	3

接著置於下圖位置時,需塗色如下:

	4	
1	2	3
	4	

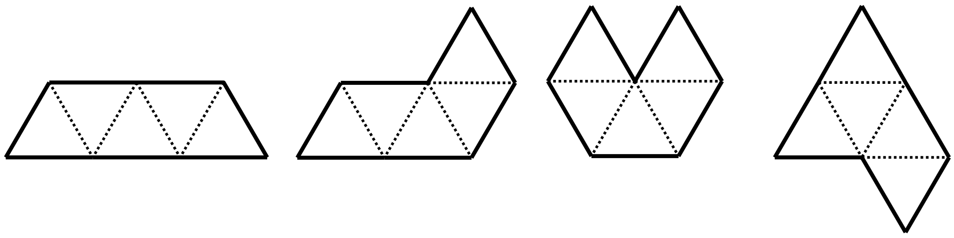
此時考慮置於下圖位置時,顏色必重複:

	4	
1	2	3
	4	

故至少需 5 種顏色,可塗色如右:

3	4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1

4. 五正三角形塊是由五個正三角形以邊對邊連接在一起,它共有四個品種:



請用其中二片,每片可以翻轉或旋轉,且必須以正三角形的邊與邊相連而拼出一個具有軸對稱的圖形。(請找出愈多愈好,並在下面的正三角形網格中沿虛線畫出拼法,這樣的圖形至少有 5 個。)

【解】