

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

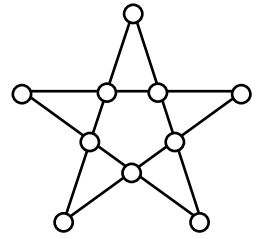
Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2012 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第二 試：綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

1. 將圖中的每一個圓圈都任意塗成黑色或白色之一。請問是否存在一種塗法使得在同一條直線上的黑圓圈數都是奇數？若存在，請將您所找到的塗法直接畫在圖中；若不存在，請完整寫出您的理由。

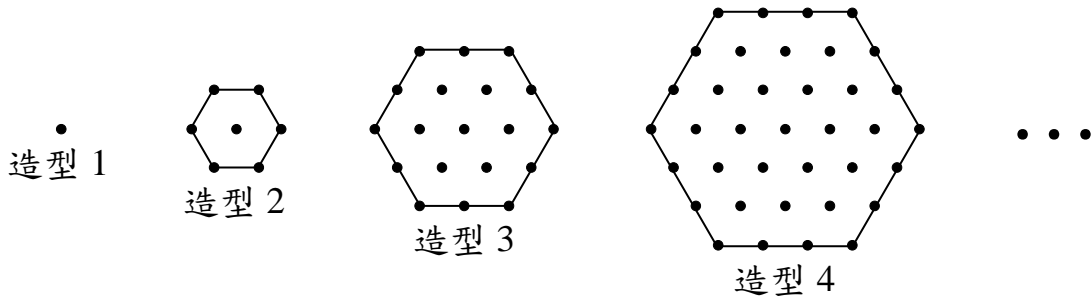


【解】

若可以讓同一條直線上的黑圓圈數都是奇數，因共有五條直線，故將這些黑圓圈數相加後仍得到奇數。

但從另一個角度來看，因每一個圓圈都在兩條直線上，因此相加時，每一個黑圓圈都被算了 2 次，故相加後的總數應為偶數，矛盾，因此這種塗法不存在。

2. 用圓點依序排列出以下造型：



- (1) 造型 1 共有 1 個圓點；造型 2 共有 7 個圓點；造型 3 共有 19 個圓點；……。
請問造型 100 共有多少個圓點？(10 分)
- (2) 在造型 100 最中心的圓點上放 100 個硬幣；由中心向外第一層的正六邊形每一個圓點上都放置 99 個硬幣；由中心向外第二層的正六邊形每一個圓點上都放置 98 個硬幣；由中心向外第三層的正六邊形每一個圓點上都放置 97 個硬幣；…，直到最外層的正六邊形每一個圓點上都放置 1 個硬幣，而做成一個正六邊形塔。請問這個正六邊形塔共有多少個硬幣？(15 分)

【解一】

- (1) 觀察規律，可知當 $n > 1$ 時，造型 n 最外圍的圓點數為 6 個頂點與每一邊上的圓點數(不含頂點上的圓點)之和，即

$$6 + 6(n - 2) = 6n - 6 = 6(n - 1)。$$

因此造型 100 的圓點數為

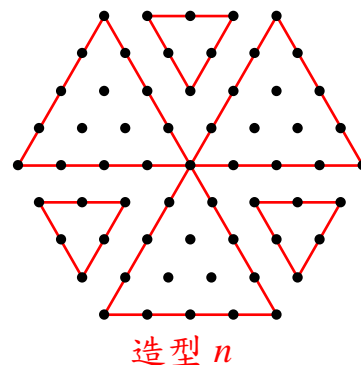
$$\begin{aligned} 1 + 6 \times (2 - 1) + 6 \times (3 - 1) + 6 \times (4 - 1) + \cdots + 6 \times (100 - 1) &= 1 + 6 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 99) \\ &= 1 + 6 \times 4950 \\ &= 29701 \end{aligned}$$

- (2) 觀察規律，可知當 $n > 1$ 時，造型 n 最外圍的圓點數為 $6n - 6$ 。
因此六角塔的硬幣數為

$$\begin{aligned}
& 100 \times 1 + 99 \times 6 \times (2-1) + 98 \times 6 \times (3-1) + 97 \times 6 \times (4-1) + \cdots + 1 \times 6 \times (100-1) \\
&= 100 + 6 \times (99 \times 1 + 98 \times 2 + 97 \times 3 + \cdots + 1 \times 99) \\
&= 100 + 6 \times (99 \times (100-99) + 98 \times (100-98) + 97 \times (100-97) + \cdots + 1 \times (100-1)) \\
&= 100 + 6 \times 100 \times (99 + 98 + 97 + \cdots + 1) - 6 \times (99 \times 99 + 98 \times 98 + 97 \times 97 + \cdots + 1 \times 1) \\
&= 100 + 6 \times 100 \times \frac{(99+1) \times 99}{2} - 6 \times \frac{99 \times (99+1) \times (2 \times 99 + 1)}{6} \\
&= 100 + 2970000 - 1970100 \\
&= 1000000
\end{aligned}$$

【解二】

- (1) 觀察規律，可知當 $n > 1$ 時，造型 n 可看成三組有同一個頂點且邊長有 n 個點的三角形與三組沒有相同頂點且邊長有 $n-2$ 個點的三角形：



因此造型 n 的圓點數為

$$\begin{aligned}
3 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + n) - 2 + 3 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2)) &= \frac{3n(n+1) + 3(n-1)(n-2)}{2} - 2 \\
&= \frac{6n^2 - 6n + 6}{2} - 2 \\
&= 3n^2 - 3n + 1
\end{aligned}$$

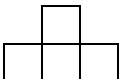
因此造型 100 的圓點數為 $3 \times 100^2 - 3 \times 100 + 1 = 29701$

- (2) 觀察規律，一層一層由下往上看，可知正六邊形塔為以造型 n 當最底層，在同一個中心上依序往上放造型 $n-1$ 、造型 $n-2$ 、 \cdots 、造型 2、造型 1。因此六角塔的硬幣數即為造型 1 至造型 n 的所有圓點數和，即為

$$\begin{aligned}
& 3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n \\
&= 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + 2n}{2} \\
&= n^3
\end{aligned}$$

故以造型 100 為底層之正六邊形塔的硬幣數為 $100^3 = 1000000$ 。

答：(1) 29701 個 (2) 1000000 個

3. 請問在 8×8 的方格表內，至少要塗上多少種顏色(每個小方格塗一種顏色)，才能使得一片  型之四方塊無論如何沿格線放入方格表，它所蓋住的

四個小方格之顏色均不相同？(您必須在右表中給出塗色的方法，並證明所

塗顏色之數量無法再少。)

【解】

可知需塗 4 種顏色以上。若塗 4 種顏色，考慮方格表內的一個 3×3 的小方格表。以數字 1、2、3、4 分別代表四種不同的顏色，則放一個指定的型式四方塊於右圖的位置時，可塗色如右：

	4	
1	2	3

接著置於下圖位置時，需塗色如下：

	4	
1	2	3
	4	

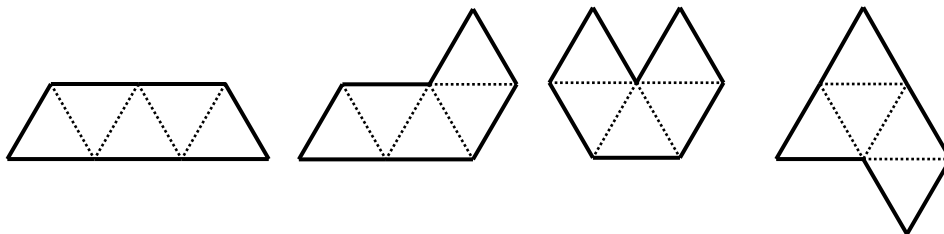
此時考慮置於下圖位置時，顏色必重複：

	4	
1	2	3
	4	

故至少需 5 種顏色，可塗色如右：

3	4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1

4. 五正三角形塊是由五個正三角形以邊對邊連接在一起，它共有四個品種：



請用其中二片，每片可以翻轉或旋轉，且必須以正三角形的邊與邊相連而拼出一個具有軸對稱的圖形。(請找出愈多愈好，並在下面的正三角形網格中沿虛線畫出拼法，這樣的圖形至少有 5 個。)

【解】

