注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN** ccmp@seed.net.tw

# 2012 小學數學競賽選拔賽決賽試題

## 第　一　試　應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

**◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題** 10 **分，共** 120 **分**

1. 在平面上有一個凸 $n$ 邊形的內角和小於 $2012^\circ$。請問 $n$ 的最大值是多少？

【解一】

因凸 13 邊形的內角和為 $(13-2)\times180^\circ=1980^\circ$、凸 14 邊形的內角和為 $(14-2)\times180^\circ=2160^\circ$，故 $n$ 的最大值是 13。

【解二】

可知凸 $n$ 邊形的內角和為 $(n-2)\times180^\circ$，故知 $(n-2)\times180^\circ<2012^\circ$，即

$$n<\frac{2012^\circ}{180^\circ}+2<12+2=14$$

故 $n$ 的最大值是 13，此時其內角和為 $(13-2)\times180^\circ=1980^\circ$。

答：13

2. 一個袋子內裝有 10 顆紅球、12 顆黑球與 13 顆白球。若要確保一次取出的球中每種顏色的球都至少有二顆，請問一次至少要取出幾顆球？

【解一】

若取出的球數少於或等於 12+13=25 顆球時，有可能取出的球全是黑球或白球，因此至少要取出 25+2=27 顆球。

【解二】

若未取出的球數多於或等於 10 顆球時，有可能紅球全未取出而留在袋中，因此至多留 8 顆球於袋中，即至少要取出 10+12+13－8=27 顆球。

答：27 顆

3. 若 $\underbrace{20122012\cdots2012}_{n\text{組}2012}9876$ 且能被 11 整除，請問 $n$ 的最小值是多少？

【解】

可知 $\underbrace{20122012\cdots2012}_{n\text{組}2012}9876$ 奇數碼與偶數碼的差為

$$n(2+0-1-2)+8+6-9-7=-n-2=-(n+2)$$

因這個數能被 11 整除，故 $-(n+2)$ 必須是 11 的倍數，即 $n$+2 是 11 的倍數，因此 $n$ 的最小值為 9。

答：9

4. 一個迴文數是從前面讀起與後面讀起都相同的數，例如 47674，5335 都是迴文數。請問從 10 到 10000000 共有多少個迴文數？

【解一】

二位數的迴文數形式為 $\overline{aa}$，故共有 9×1=9 個二位數的迴文數。

三位數的迴文數形式為$\overline{aba}$，故共有 9×10=90 個三位數的迴文數。
四位數的迴文數形式為$\overline{abba}$，故共有 9×10=90 個四位數的迴文數。
五位數的迴文數形式為$\overline{abcba}$，故共有 9×10×10=900 個五位數的迴文數。
六位數的迴文數形式為$\overline{abccba}$，故共有 9×10×10=900 個六位數的迴文數。
七位數的迴文數形式為$\overline{abcdcba}$，故共有 9×10×10×10=9000 個七位數的迴文數。
因此共 9000+900+900+90+90+9=10989 個迴文數。

【解二】

迴文數至少為二位數，且形式為$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$或$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_na_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$，故計算迴文數的個數時，僅需考慮$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$即可，且可得知對於每一個不同的 $n$ 位數$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$，可得到一個$2n-1$位數的迴文數$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$與一個 $2n$ 位數的迴文數$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_na_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$。
而題目為求出 10 到 10000000 間迴文數的個數，故只需考慮 1 到 9999 即可。
可知 1 至 9 這 9 個數共對應了 9×1=9 個二位數的迴文數，而 10 至 999 這 990 個數共對應了 990×2=1980 個三位數、四位數、五位數與六位數的迴文數，而 1000 至 9999 這 9000 個數能對應出 9000×1=9000 個七位數的迴文數，因此共有 9+1980 +9000=10989 個迴文數。

答：10989 個

5. 將正整數 $N$ 接寫在任意一個正整數的右邊(例如將 2 接寫在 35 的右邊而得到 352)，如果得到的新數都能被 $N$ 整除，則稱 $N$ 為「魔術數」。請問有多少個魔術數小於 2012？

【解】

若 $N$ 為一位數，則知對於所有的正整數 $K$，有 $N$ 整除 $10K+N$，因此 $N$ 為 10 的因數，即 $N$=1、2、5；
若 $N$ 為二位數，則知對於所有的正整數 $K$，有 $N$ 整除 $100K+N$，因此 $N$ 為 100 的二位數因數，即 $N$=10、20、25、50；
若 $N$ 為三位數，則知對於所有的正整數 $K$，有 $N$ 整除 $1000K+N$，因此 $N$ 為 1000 的三位數因數，即 $N$=100、125、200、250、500；
若 $N$ 為四位數，則知對於所有的正整數 $K$，有 $N$ 整除 $10000K+N$，因此 $N$ 為 10000 的四位數因數且小於 2012，即 $N$=1000、1250、2000。
合計共 3+4+5+3=15 個。

答：15 個

6. 從 0～9 中取出 6 個不同的數碼組成兩個三位數 $A$ 及 $B$ 使得 $A+B=1719$。請問 $A\times B$ 的最大值是什麼？

【解】

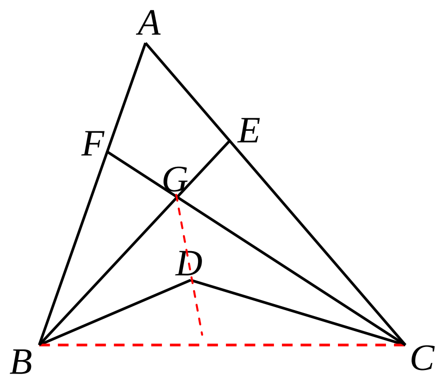
令 $A=\overline{abc}$、$B=\overline{def}$，則可得以下加式：

$$\begin{array}{rcccc} & & a & b & c \\ + & & d & e & f \\ \hline & 1 & 7 & 1 & 9 \end{array}$$

由和的千位數與百位數知 $a$、$d$ 必為 8、9 的組合，且 $b+e$ 沒有進位，故可進一步推知 $b$、$e$ 必為 0、1 的組合。不失一般性可令 $\overline{abc}>\overline{def}$，因此時已知兩數之和 $\overline{abc}+\overline{def}$ 為定值 1719，所以可得知兩數之積 $\overline{abc}\times\overline{def}$ 的最大值會發生在兩數之差 $\overline{abc}-\overline{def}$ 為最小值時，即取 $\overline{abc}=902$、$\overline{def}=817$，此時 $\overline{abc}\times\overline{def}=736934$。

答：736934

7. 如圖，$BE$ 平分 $\angle ABD$、$CF$ 平分 $\angle ACD$、$BE$ 與 $CF$ 相交於 $G$。若 $\angle BDC=140°$、$\angle BGC=100°$，請問 $\angle A$ 為多少度？。




【解 1】

連接 $BC$ 並作直線 $GD$，則可得知

$\angle BDC=\angle BGC+\angle GBD+\angle GCD$，故

$\angle GBD+\angle GCD=\angle BDC-\angle BGC=140°-100°=40°$。

因 $BE$ 平分 $\angle ABD$、$CF$ 平分 $\angle ACD$，故知

$\angle ABD+\angle ACD=2(\angle GBD+\angle GCD)=80°$；

因 $\angle BDC=140°$，故 $\angle DBC+\angle DCB=180°-140°=40°$。

故可得知 $\angle A=180°-(\angle ABD+\angle DBC+\angle ACD+\angle DCB)=180°-(80°+40°)=60°$

【解 2】

作直線 $GD$，則可得知 $\angle BDC=\angle BGC+\angle GBD+\angle GCD$，故

$\angle GBD+\angle GCD=\angle BDC-\angle BGC=140°-100°=40°$。

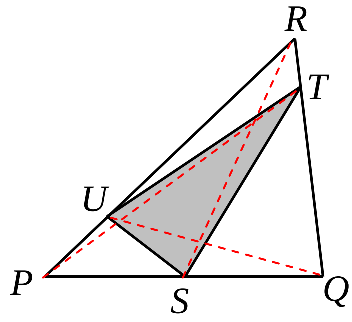
因 $BE$ 平分 $\angle ABD$、$CF$ 平分 $\angle ACD$，故知

$\angle ABD+\angle ACD=2(\angle GBD+\angle GCD)=80°$；

因此 $\angle A=\angle BDC-(\angle ABD+\angle ACD)=140°-80°=60°$。

答：$60°$

8. 三角形 $PQR$ 的面積為 120 $cm^2$，已知 $3PU=RU$、$PS=SQ$、$4RT=TQ$，如圖所示。請問△$STU$ 之面積為多少 $cm^2$？




【解】

可知 $PU:RU=1:3$、$PS:SQ=1:1$、$RT:TQ=1:4$。連接 $UQ$、$RS$、$PT$。

因 $PS:SQ=1:1$，故△$SQR$ 之面積為△$PQR$ 之面積的 $\frac{1}{2}$；

再因 $RT:TQ=1:4$，故△$SQT$ 之面積為△$PQR$ 之面積的 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$，即 48 $cm^2$；

因 $RT:TQ=1:4$，故△$PTR$ 之面積為△$PQR$ 之面積的 $\frac{1}{5}$；再因 $PU:RU=1:3$，

故△$UTR$ 之面積為△$PQR$ 之面積的 $\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$，即 18 $cm^2$；

因 $PU$：$RU$=1：3，故△$PQU$ 之面積為△$PQR$ 之面積的$\frac{1}{4}$；再因 $PS$：$SQ$=1：1，故△$PSU$ 之面積為△$PQR$ 之面積的$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，即 15 cm$^2$；

因此△$STU$ 之面積為 120－48－18－15=39 cm$^2$。

答：39 cm$^2$

9. 將一根長為 50 cm 的木棍用任意分成 5 小段，每小段的長度都是正整數 cm，且以這 5 小段為邊可以圍成一個凸五邊形。請問其中最長的一段的長度有多少種可能的取值？(註：一個凸五邊形的每個內角都小於 180°)

【解】

可令最長的一段之長度為 $a$，則其餘四段的長度總和為$10-a$。

因可圍成五邊形，故知一邊長恆小於其餘四邊和，即$a<50-a$，故$a<25$；

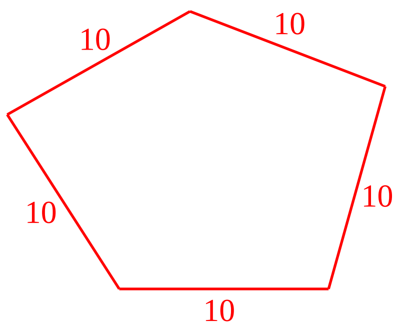
且因最長的一段之長度為 $a$，故知$50\le a+a+a+a+a=5a$，即$10\le a$。

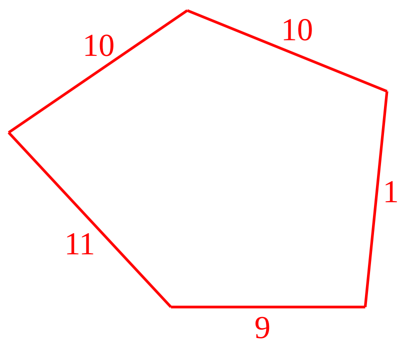
因此$10\le a<25$。因此 $a$ 共有 10、11、12、…、24 共 15 種可能的取值。

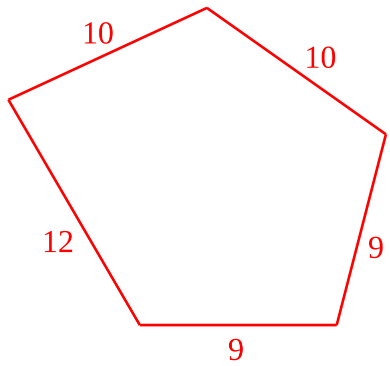
當 $a$=10 時，可令這五邊形的邊長為 10、10、10、10、10；

當 $a$=11 時，例如可令這五邊形的邊長為 11、10、10、10、9；

當 $a$=12 時，例如可令這五邊形的邊長為 12、10、10、9、9；



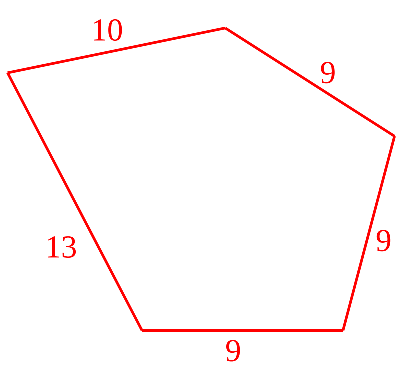


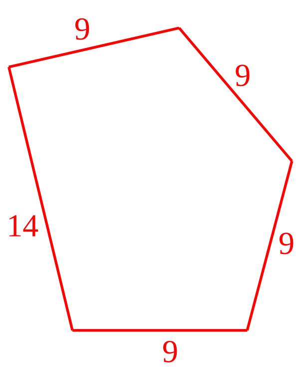


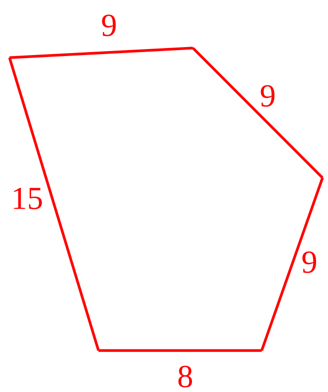

當 $a$=13 時，例如可令這五邊形的邊長為 13、10、9、9、9；

當 $a$=14 時，例如可令這五邊形的邊長為 14、9、9、9、9；

當 $a$=15 時，例如可令這五邊形的邊長為 15、9、9、9、8；



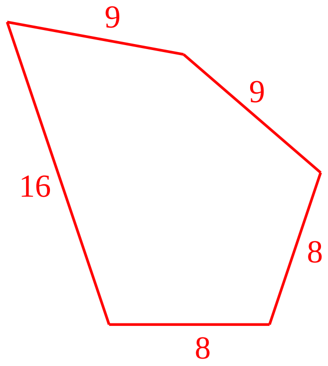


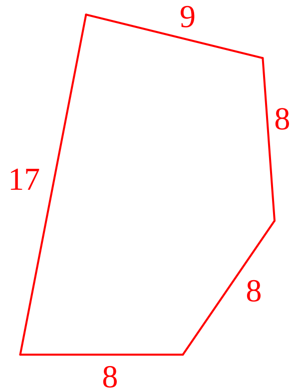


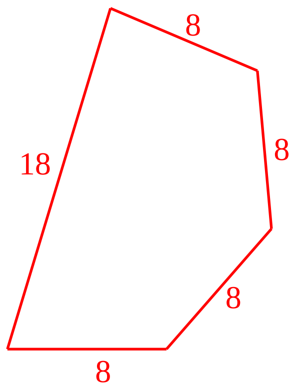

當 $a$=16 時，例如可令這五邊形的邊長為 16、9、9、8、8；

當 $a$=17 時，例如可令這五邊形的邊長為 17、9、8、8、8；

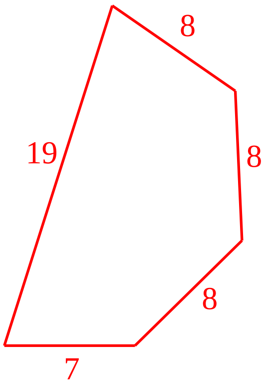
當 $a$=18 時，例如可令這五邊形的邊長為 18、8、8、8、8；

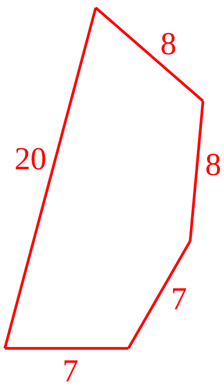


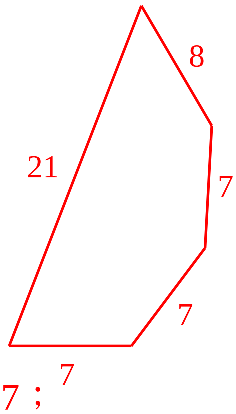



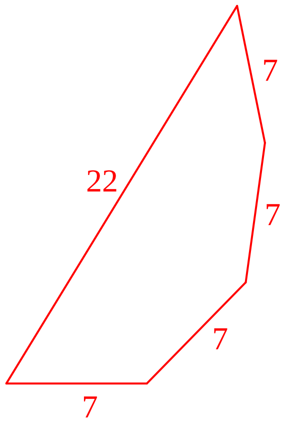

當 $a$=19 時，例如可令這五邊形的邊長為 19、8、8、8、7；
當 $a$=20 時，例如可令這五邊形的邊長為 20、8、8、7、7；
當 $a$=21 時，例如可令這五邊形的邊長為 21、8、7、7、7；

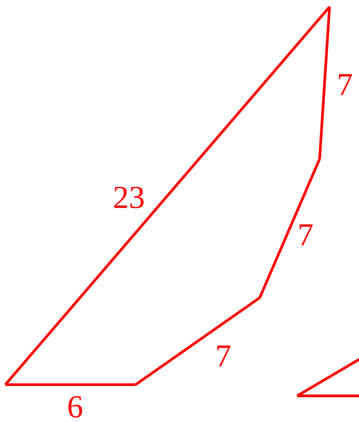


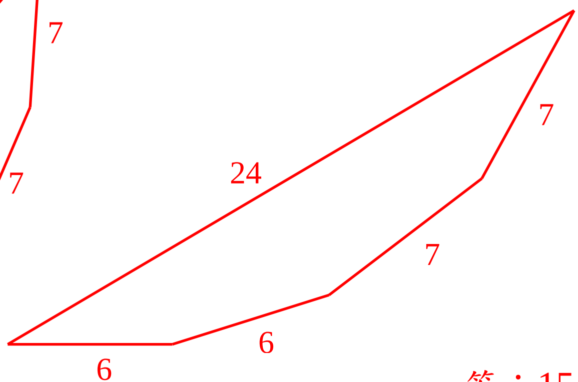




當 $a$=22 時，例如可令這五邊形的邊長為 22、7、7、7、7；
當 $a$=23 時，例如可令這五邊形的邊長為 23、7、7、7、6；
當 $a$=24 時，例如可令這五邊形的邊長為 24、7、7、6、6；




答：15 種

10. 某營區駐有一個營的部隊，營長要求全營集合時所有的士兵必須排列成每邊人數一樣的方陣，方陣內部沒有空位。但此時士兵總數無法排列成方陣，除非增加 31 名士兵或減少 28 名士兵才能滿足營長的要求。請問這個營共有多少名士兵？

【解一】

因 $31^2$= 961、$30^2$=900，此二數相差超過 59，故士兵數不會介於這兩個數之間且

少於 900；因 $29^2$=841，與 900 恰相差 59，故知士兵數介於這兩個數之間，且可得知士兵數為 900－31=869=841+28。

【解二】

因排成方陣的人數需為一個完全平方數，故可令增加 31 名士兵後的人數為 $a^2$、減少 28 名士兵後的人數為 $b^2$，則知 $a^2-b^2=31+28=59$，即 $(a-b)(a+b)=59$。因 59 為質數且兩正數和必大於兩正數差，故知

$$\begin{cases} a+b=59 \\ a-b=1 \end{cases}$$

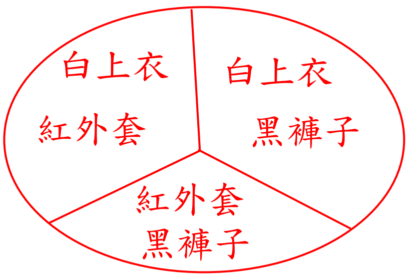
因此 $a$=(59+1)÷2=30、$b$=(59－1)÷2=29，此時便可以得知這個營的士兵數為 $30^2-31=29^2+28=869$ 名。

答：869 名

11. 某班共有 38 位學生，某日恰有 11 位學生穿白上衣、13 位學生穿紅外套、14 位學生穿黑褲子，但沒有人同時穿白上衣、紅外套與黑褲子。若至少穿白上衣、紅外套與黑褲子其中一件的學生都有帶水壺，19 位學生沒帶水壺，請問這一天共有幾位學生同時穿紅外套與黑褲子？

【解】

可知帶水壺的學生共有 38－19=19 位，此即至少穿白上衣、紅外套與黑褲子其中一件的學生總數。因為穿白上衣、紅外套與黑褲子的總人次為 11+13+14=38，此恰為 19 的 2 倍，且沒有人同時穿這三種顏色的服飾，故可推得穿白上衣、紅外套與黑褲子的學生必都恰穿了其中的兩種，否則總人次必定大於 19 的 2 倍而不會相等。因此可得圖示如下：




故知穿紅色外套與黑色褲子的學生即為這 19 位學生中沒穿白色上衣的人，共有 19－11=8 位。

答：8 位

12. 某校畢業旅行共 968 位同學參加，校方向巴士公司承租巴士。已知巴士公司有 16 人座的中型巴士與 35 人座的大型巴士。若學校承租的每輛大型巴士與中型巴士都坐滿了同學，請問學校合計至少向巴士公司承租了多少輛巴士？

【解一】

可令學校向巴士公司承租了 $a$ 輛中型巴士與 $b$ 輛大型巴士，則可得知

$$16a+35b=968$$

且所求即為 $a$+$b$ 的最小值。

由 $16a+35b=968$ 可得 $a=\dfrac{968-35b}{16}=60-2b+\dfrac{8-3b}{16}$。利用列舉法，可得正整數

解如下表：

| | | |
|---|---|---|
| $b$ | 8 | 24 |
| $a$ | 43 | 8 |
| $a+b$ | 51 | 32 |

故所求為 32 輛。

【解二】

可令學校向巴士公司承租了 $a$ 輛中型巴士與 $b$ 輛大型巴士，則可得知

$$16a+35b=968$$

且所求即為 $a+b$ 的最小值。

由 $35b=968-16a=8(121-2a)$ 可知 $b$ 必為 8 的倍數，且 $b\leq\dfrac{968}{35}<28$。

因 35>16×2，故可判斷出 $b$ 的值每減少 1，$a$ 的值至少要增加 2，則可知 $a+b$ 的值會增加，所以要求出 $a+b$ 的最小值，需使 $b$ 的值越大越好。故取 $b$=24，此時 $a=\dfrac{968-35\times24}{16}=8$。因此所求為 8+24=32 輛。

答：32 輛