2012 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

______縣市______國民小學__年級　編號：______姓名：__________性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 甲、乙兩人進行以下遊戲。兩人約定由甲開始，輪流把 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 這十個數碼之一填入下面的任何一個方格中。

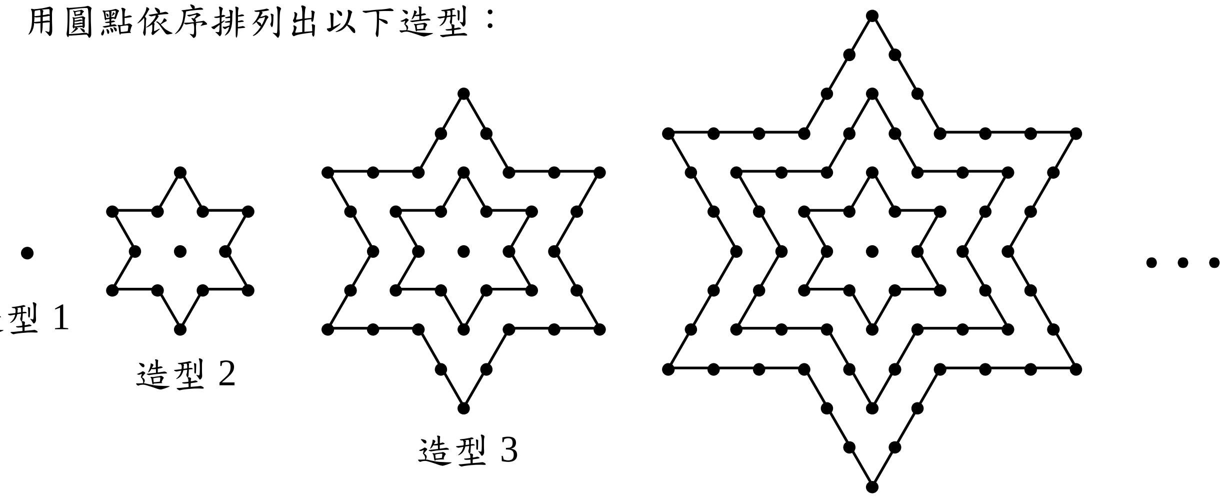
□□□□□□

每一方格只能填一個數碼，六個方格都填上數碼(數碼可重複)後，就形成一個數(前面的 0 可忽略)。如果這個數值能被 13 整除，則乙獲勝；如果不能被 13 整除，則甲獲勝。請問乙方有沒有必勝策略？若有，請說明乙的必勝策略；若沒有，請證明甲至少有一種填數方法使乙都沒有辦法必勝。

【解】

利用 1001=7×11×13。因四、五、六位數中，1001 的倍數必為 $\overline{abcabc}$ 的形式，故乙可視前一次甲所填的數之位置來對應填入一個相同的數，使兩人填入的數也成為 $\overline{abcabc}$ 的形式，讓此數成為 1001 的倍數，即為 13 的倍數，故知利用此策略則乙必勝。

2. 用圓點依序排列出以下造型：



造型 1　造型 2　造型 3　造型 4

(1) 造型 1 共有 1 個圓點；造型 2 共有 13 個圓點；造型 3 共有 37 個圓點；……. 。請問造型 100 共有多少個圓點？

(2) 在造型 100 最中心的圓點上放 100 個硬幣；由中心向外第一層的六角星形每一個圓點上都放置 99 個硬幣；由中心向外第二層的六角星形每一個圓點上都放置 98 個硬幣；由中心向外第三層的六角星形每一個圓點上都放置 97 個硬幣；…，直到最外層的六角星形每一個圓點上都放置 1 個硬幣而做成一個六角星形塔。請問這個六角星形塔共有多少個硬幣？

【解一】

(1) 觀察規律，可知當 $n>1$ 時，造型 n 最外圍的圓點數為 12 個頂點與每一邊上的圓點數(不含頂點上的圓點)之和，即

$$12+12(n-2)=12n-12=12(n-1)。$$

因此造型 100 的圓點數為

$$\begin{aligned}&1+12\times(2-1)+12\times(3-1)+12\times(4-1)+\cdots+12\times(100-1)\\&=1+12\times(1+2+3+\cdots+99)\\&=1+12\times4950=59401\end{aligned}$$

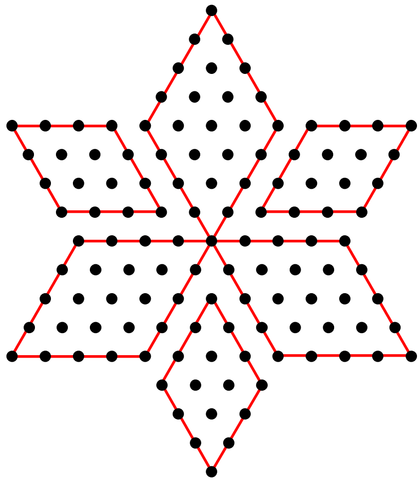
(2) 觀察規律，可知當 $n>1$ 時，造型 n 最外圍的圓點數為 $12(n-1)$。

因此六角星形塔的硬幣數為

$$\begin{aligned}&100\times1+99\times12\times(2-1)+98\times12\times(3-1)+97\times12\times(4-1)+\cdots+1\times12\times(100-1)\\&=100+12\times(99\times1+98\times2+97\times3+\cdots+1\times99)\\&=100+12\times(99\times(100-99)+98\times(100-98)+97\times(100-97)+\cdots+1\times(100-1))\\&=100+12\times100\times(99+98+97+\cdots+1)-12\times(99\times99+98\times98+97\times97+\cdots+1\times1)\\&=100+12\times100\times\frac{(99+1)\times99}{2}-12\times\frac{99\times(99+1)\times(2\times99+1)}{6}\\&=100+5940000-3940200=1999900\end{aligned}$$

【解二】

(1) 觀察規律，可知當 $n>1$ 時，造型 n 可看成三組有同一個頂點且邊長有 n 個點的菱形與三組沒有相同頂點且邊長有 $n-1$ 個點的菱形：



造型 n

因此造型 n 的圓點數為

$$\begin{aligned}&(3n^2-2)+3(n-1)^2\\&=3n^2-2+3n^2-6n+3\\&=6n^2-6n+1\end{aligned}$$

所以造型 100 的圓點數為

$$6\times100^2-6\times100+1=59401$$

(2) 觀察規律，一層一層由下往上看，可知正六邊形塔為以造型 n 當最底層，在同一個中心上依序往上放造型 $n-1$、造型 $n-2$、…、造型 2、造型 1。

因此六角星形塔的硬幣數即為造型 1 至造型 n 的所有圓點數和，即為

$$\begin{aligned}&6\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-6\times(1+2+3+\cdots+n)+n\\&=6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-6\times\frac{n(n+1)}{2}+n\\&=n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)+n=2n^3-n\end{aligned}$$

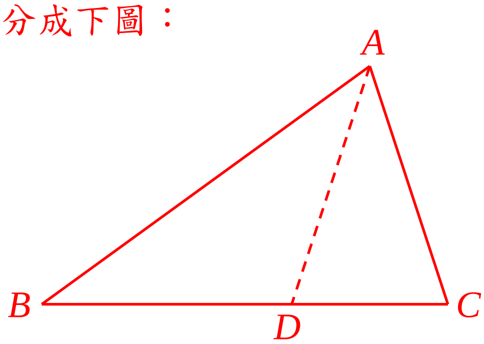
故以造型 100 為底層之正六邊形塔的硬幣數為 $2\times100^3-100=1999900$。

答：(1) 59401 個 (2) 1999900 個

3. 等腰三角形 ABC 可以被劃分成兩個較小的等腰三角形。請問這樣的$\triangle ABC$ 一共有幾種形狀？請將您所發現的形狀以列出三個內角的方式來列出來，例如$(x°, x°, y°)$。

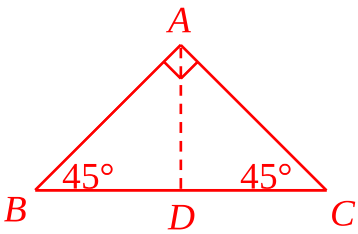
【解】

可令等腰三角形 ABC 劃分成下圖：



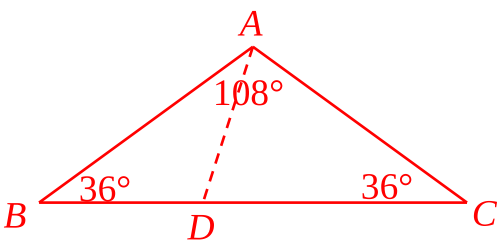
如上圖，$\angle ADB \geq 90°$ 的情形時，可知等腰三角形 ABD 必為 AB=AD 且 $\angle BAD$=$\angle B$。觀察三角形 ACD：

(1) 若 AD=CD，則有 $\angle BAC = 90°$，此時$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，即三個內角為 45°、45°、90°。

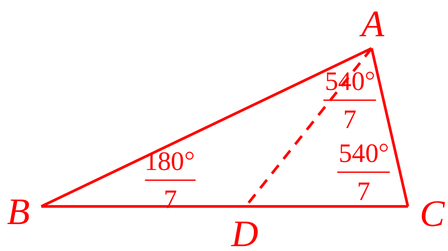


(2) 若 CD=AC，則可令 $\angle B = \alpha°$，此時 $\angle ADB = 180° - 2\alpha°$、$\angle ADC = 2\alpha°$、$\angle BAC = 3\alpha°$、$\angle C = 180° - 4\alpha°$。因 $\angle ADB \geq 90°$，故知 $\alpha \leq 45°$。

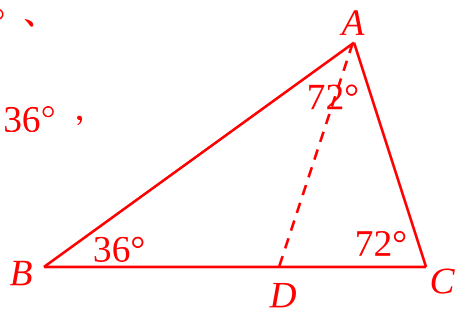
(i) 若 $\angle B = \angle C$，則由 $\alpha° = 180° - 4\alpha°$ 可得 $\alpha = 36°$，即三個內角為 36°、36°、108°；



(ii) 若 $\angle BAC = \angle C$，則由 $3\alpha° = 180° - 4\alpha°$ 可得 $\alpha = \dfrac{180°}{7}$，即三個內角為 $\dfrac{180°}{7}$、$\dfrac{540°}{7}$、$\dfrac{540°}{7}$。



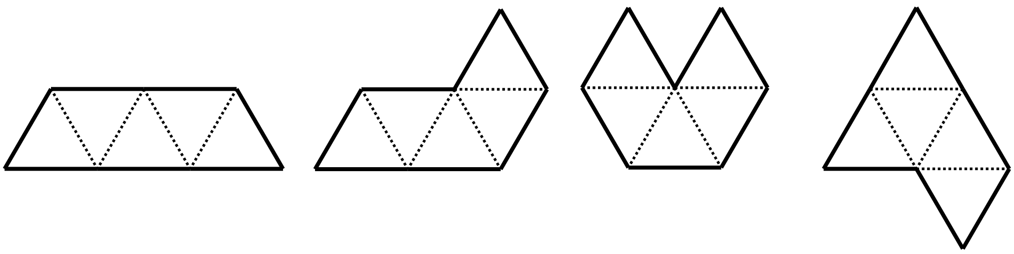
(3) 若 AD=AC，則可令 $\angle B = \alpha°$，此時 $\angle C = 2\alpha°$、$\angle BAC = 180° - 3\alpha°$。此時 $\angle B \neq \angle C$，故有 $\angle BAC = \angle C$，即 $2\alpha° = 180° - 3\alpha°$，可得 $\alpha = 36°$，即三個內角為 36°、72°、72°。



故△*ABC* 一共有四種形狀：

(45°、45°、90°)、(36°、36°、108°)、($\frac{180°}{7}$、$\frac{540°}{7}$、$\frac{540°}{7}$)、(36°、72°、72°)。

4. 五正三角形塊是由五個正三角形以邊對邊連接在一起，它共有四個品種：



請用其中三片，每片可以翻轉或旋轉，且必須以正三角形的邊與邊相連而拼出一個具有軸對稱的圖形。(請找出愈多愈好，並在下面的正三角形網格中沿虛線畫出拼法，這樣的圖形至少有 21 個。)

【解】