

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2012 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第二試：綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

_____縣市_____國民小學__年級 編號：_____姓名：_____性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 甲、乙兩人進行以下遊戲。兩人約定由甲開始，輪流把 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 這十個數碼之一填入下面的任何一個方格中。

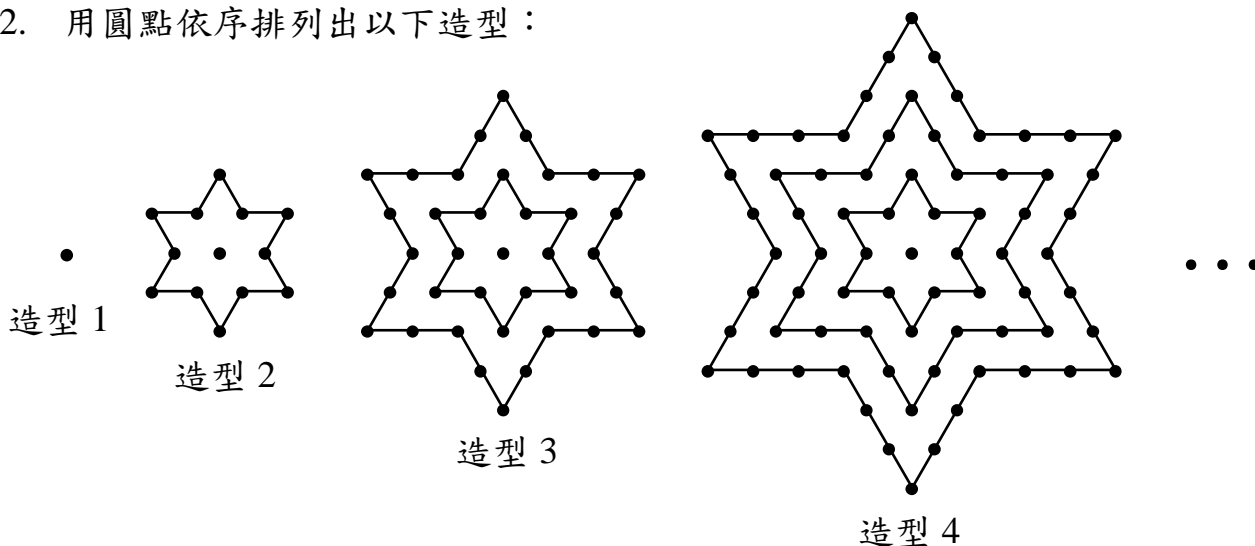
□□□□□□

每一方格只能填一個數碼，六個方格都填上數碼(數碼可重複)後，就形成一個數(前面的 0 可忽略)。如果這個數值能被 13 整除，則乙獲勝；如果不能被 13 整除，則甲獲勝。請問乙方有沒有必勝策略？若有，請說明乙的必勝策略；若沒有，請證明甲至少有一種填數方法使乙都沒有辦法必勝。

【解】

利用 $1001=7\times 11\times 13$ 。因四、五、六位數中，1001 的倍數必為 \overline{abcabc} 的形式，故乙可視前一次甲所填的數之位置來對應填入一個相同的數，使兩人填入的數也成為 \overline{abcabc} 的形式，讓此數成為 1001 的倍數，即為 13 的倍數，故知利用此策略則乙必勝。

2. 用圓點依序排列出以下造型：



- (1) 造型 1 共有 1 個圓點；造型 2 共有 13 個圓點；造型 3 共有 37 個圓點；……。請問造型 100 共有多少個圓點？
- (2) 在造型 100 最中心的圓點上放 100 個硬幣；由中心向外第一層的六角星形每一個圓點上都放置 99 個硬幣；由中心向外第二層的六角星形每一個圓點上都放置 98 個硬幣；由中心向外第三層的六角星形每一個圓點上都放置 97 個硬幣；…，直到最外層的六角星形每一個圓點上都放置 1 個硬幣而做成一個六角星形塔。請問這個六角星形塔共有多少個硬幣？

【解一】

- (1) 觀察規律，可知當 $n > 1$ 時，造型 n 最外圍的圓點數為 12 個頂點與每一邊上的圓點數(不含頂點上的圓點)之和，即

$$12 + 12(n - 2) = 12n - 12 = 12(n - 1)。$$

因此造型 100 的圓點數為

$$\begin{aligned} & 1 + 12 \times (2 - 1) + 12 \times (3 - 1) + 12 \times (4 - 1) + \cdots + 12 \times (100 - 1) \\ &= 1 + 12 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 99) \\ &= 1 + 12 \times 4950 = 59401 \end{aligned}$$

- (2) 觀察規律，可知當 $n > 1$ 時，造型 n 最外圍的圓點數為 $12(n - 1)$ 。

因此六角星形塔的硬幣數為

$$\begin{aligned} & 100 \times 1 + 99 \times 12 \times (2 - 1) + 98 \times 12 \times (3 - 1) + 97 \times 12 \times (4 - 1) + \cdots + 1 \times 12 \times (100 - 1) \\ &= 100 + 12 \times (99 \times 1 + 98 \times 2 + 97 \times 3 + \cdots + 1 \times 99) \\ &= 100 + 12 \times (99 \times (100 - 99) + 98 \times (100 - 98) + 97 \times (100 - 97) + \cdots + 1 \times (100 - 1)) \\ &= 100 + 12 \times 100 \times (99 + 98 + 97 + \cdots + 1) - 12 \times (99 \times 99 + 98 \times 98 + 97 \times 97 + \cdots + 1 \times 1) \\ &= 100 + 12 \times 100 \times \frac{(99 + 1) \times 99}{2} - 12 \times \frac{99 \times (99 + 1) \times (2 \times 99 + 1)}{6} \\ &= 100 + 5940000 - 3940200 = 1999900 \end{aligned}$$

【解二】

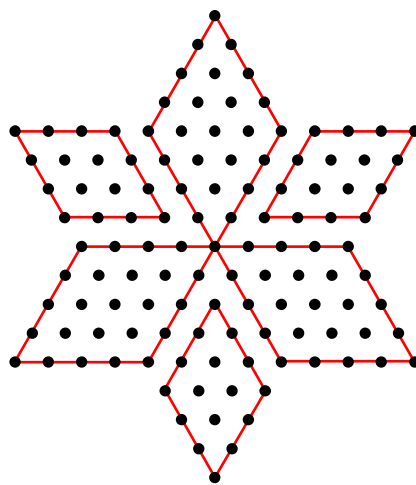
- (1) 觀察規律，可知當 $n > 1$ 時，造型 n 可看成三組有同一個頂點且邊長有 n 個點的菱形與三組沒有相同頂點且邊長有 $n - 1$ 個點的菱形：

因此造型 n 的圓點數為

$$\begin{aligned} & (3n^2 - 2) + 3(n - 1)^2 \\ &= 3n^2 - 2 + 3n^2 - 6n + 3 \\ &= 6n^2 - 6n + 1 \end{aligned}$$

所以造型 100 的圓點數為

$$6 \times 100^2 - 6 \times 100 + 1 = 59401$$



造型 n

- (2) 觀察規律，一層一層由下往上看，可知正六邊形塔為以造型 n 當最底層，在同一個中心上依序往上放造型 $n - 1$ 、造型 $n - 2$ 、 \cdots 、造型 2、造型 1。因此六角星形塔的硬幣數即為造型 1 至造型 n 的所有圓點數和，即為

$$\begin{aligned} & 6 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 6 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n \\ &= 6 \times \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} - 6 \times \frac{n(n + 1)}{2} + n \\ &= n(n + 1)(2n + 1) - 3n(n + 1) + n = 2n^3 - n \end{aligned}$$

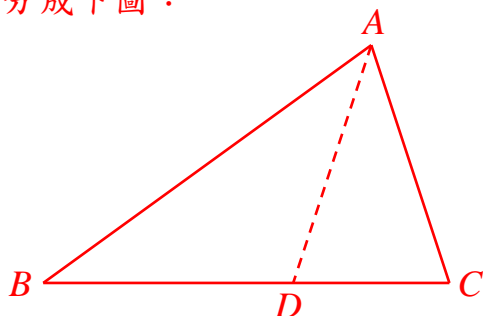
故以造型 100 為底層之正六邊形塔的硬幣數為 $2 \times 100^3 - 100 = 1999900$ 。

答：(1) 59401 個 (2) 1999900 個

3. 等腰三角形 ABC 可以被劃分成兩個較小的等腰三角形。請問這樣的 $\triangle ABC$ 一共有幾種形狀？請將您所發現的形狀以列出三個內角的方式來列出來，例如 $(x^\circ, x^\circ, y^\circ)$ 。

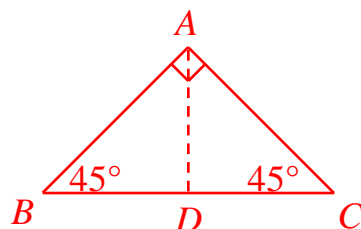
【解】

可令等腰三角形 ABC 劃分成下圖：



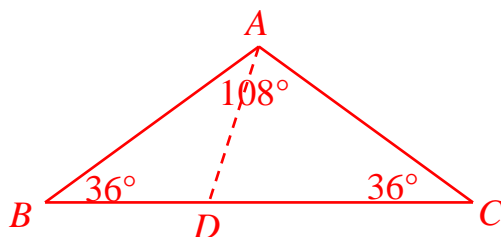
如上圖， $\angle ADB \geq 90^\circ$ 的情形時，可知等腰三角形 ABD 必為 $AB=AD$ 且 $\angle BAD=\angle B$ 。觀察三角形 ACD ：

- (1) 若 $AD=CD$ ，則有 $\angle BAC=90^\circ$ ，此時 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，即三個內角為 45° 、 45° 、 90° 。



- (2) 若 $CD=AC$ ，則可令 $\angle B=\alpha^\circ$ ，此時 $\angle ADB=180^\circ-2\alpha^\circ$ 、 $\angle ADC=2\alpha^\circ$ 、 $\angle BAC=3\alpha^\circ$ 、 $\angle C=180^\circ-4\alpha^\circ$ 。因 $\angle ADB \geq 90^\circ$ ，故知 $\alpha \leq 45^\circ$ 。

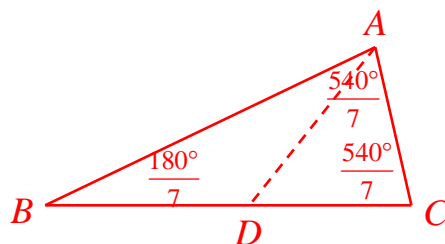
- (i) 若 $\angle B=\angle C$ ，則由 $\alpha^\circ=180^\circ-4\alpha^\circ$ 可得 $\alpha=36^\circ$ ，即三個內角為 36° 、 36° 、 108° ；



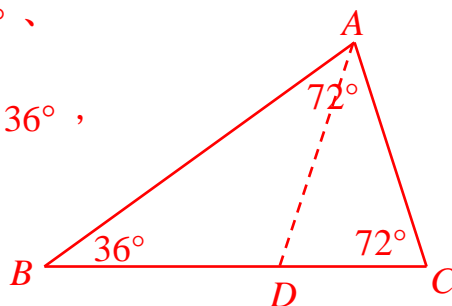
- (ii) 若 $\angle BAC=\angle C$ ，則由 $3\alpha^\circ=180^\circ-4\alpha^\circ$

可得 $\alpha=\frac{180^\circ}{7}$ ，即三個內角為

$\frac{180^\circ}{7}$ 、 $\frac{540^\circ}{7}$ 、 $\frac{540^\circ}{7}$ 。



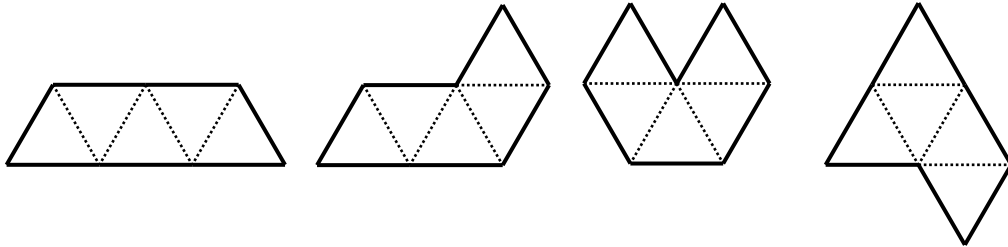
- (3) 若 $AD=AC$ ，則可令 $\angle B=\alpha^\circ$ ，此時 $\angle C=2\alpha^\circ$ 、 $\angle BAC=180^\circ-3\alpha^\circ$ 。此時 $\angle B \neq \angle C$ ，故有 $\angle BAC=\angle C$ ，即 $2\alpha^\circ=180^\circ-3\alpha^\circ$ ，可得 $\alpha=36^\circ$ ，即三個內角為 36° 、 72° 、 72° 。



故 $\triangle ABC$ 一共有四種形狀：

$(45^\circ、45^\circ、90^\circ)$ 、 $(36^\circ、36^\circ、108^\circ)$ 、 $(\frac{180^\circ}{7}、\frac{540^\circ}{7}、\frac{540^\circ}{7})$ 、 $(36^\circ、72^\circ、72^\circ)$ 。

4. 五正三角形塊是由五個正三角形以邊對邊連接在一起，它共有四個品種：



請用其中三片，每片可以翻轉或旋轉，且必須以正三角形的邊與邊相連而拼出一個具有軸對稱的圖形。(請找出愈多愈好，並在下面的正三角形網格中沿虛線畫出拼法，這樣的圖形至少有 21 個。)

【解】

