2013 小學數學競賽選拔賽初賽試題

第 二 試：應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ **請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分**

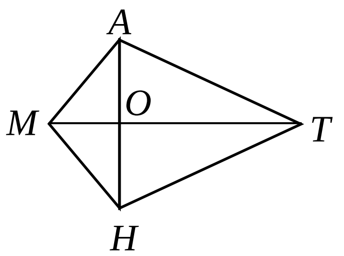
1. 有位善心人士，把口袋裡的錢的一半再加 100 元捐給了 A 基金會，把口袋剩下的錢的一半再加 200 元捐給了 B 基金會，最後再把口袋裡剩下的錢的一半再加 300 元捐給了 C 基金會。結果他口袋裡還剩下 100 元，請問他捐給 B 基金會多少元？

【解】

可知在捐錢給 C 基金會前，他口袋裡的錢為$(100+300)\times 2=800$ 元、可知在捐錢給 B 基金會前，他口袋裡的錢為$(800+200)\times 2=2000$ 元、可知他捐錢給 B 基金會的錢為 $2000\div 2+200=1200$ 元。

ANS：1200 元

2. 四邊形 $MATH$ 中，對角線 MT 與 AH 相交於點 O，已知 $MA=MH$ 且 $TA=TH$，如圖所示。若$\triangle MAH$ 與$\triangle TAH$ 的面積比為 1：4 且 $MT=60$ cm，請問 OT 的長度為多少 cm？



【解 1】

首先證明四邊形 $MATH$ 為箏形，其對角線互相垂直。因 $MA=MH$、$TA=TH$、$MT=MT$，可知$\triangle MAT$ 與$\triangle MHT$ 是全等三角形，即$\angle AMT=\angle HMT$；而由 $MA=MH$ 可知$\angle MAO=\angle MHO$，因此$\triangle MAO$ 與$\triangle MHO$ 是全等三角形，故$\angle AOM=\angle HOM=90°$，即 $MT\perp AH$。

現知$\triangle MAH$ 與$\triangle TAH$ 有共同邊 AH 且因 $MT\perp AH$ 與$\triangle MAH$ 與$\triangle TAH$ 的面積比為 1：4，故知 MO：$OT=1$：4。

因 $50=MT=MO+OT=\frac{1}{4}OT+OT=\frac{5}{4}OT$，故 $OT=\frac{4}{5}\times 60=48$ cm。

【解 2】

$\triangle MAH$ 與$\triangle TAH$ 有共同邊 AH，根據共邊定理：$\triangle MAH$ 與$\triangle TAH$ 的面積比等於 MO 比 OT，故 $OT=\frac{4}{5}\times 60=48$ cm。

ANS：48 cm

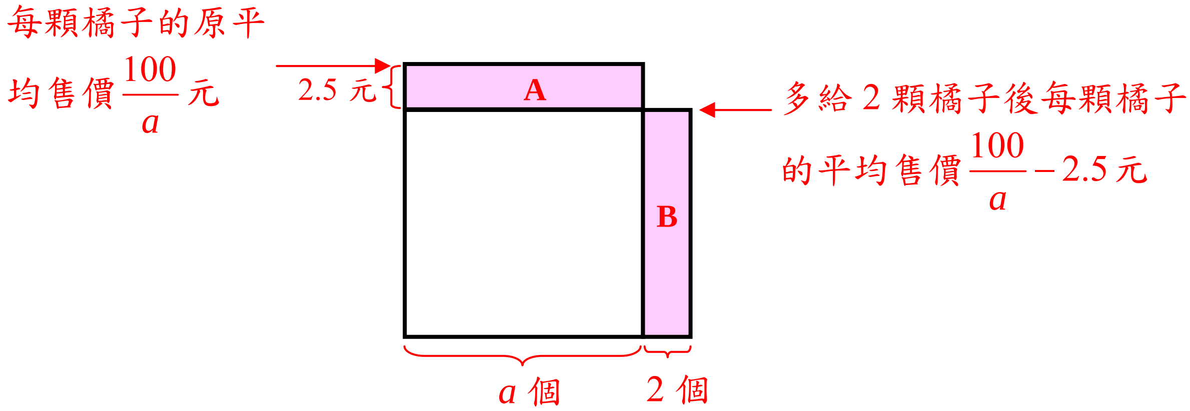
3. 果農以一盤橘子 100 元售出，小李買了一盤，果農發現這盤橘子太小，又補了 2 顆給小李，這使得每顆橘子的平均售價比原來的平均售價便宜 2.5 元。請問原來橘子一盤有幾顆？

【解 1】

每盤橘子的售價固定為 100 元，則 a 顆橘子的平均售價與 a+2 顆橘子的平均售價之差將隨著 a 越大而越小。已知 $\frac{100}{9}-\frac{100}{11}=\frac{200}{99}<2.5$ 且 $\frac{100}{7}-\frac{100}{9}=\frac{200}{63}>2.5$ 當 a=8 時，每顆橘子原來的平均售價為 12.5 元，增加 2 顆後的平均售價為 10 元比原來的平均售價便宜 2.5 元，符合條件，故原來橘子一盤有 8 顆。

【解 2】

若一盤原有 a 顆橘子，則每顆橘子原來的平均售價為 $\frac{100}{a}$ 元。由條件「多給 2 顆橘子且總售價仍相同為 100 元，則每顆橘子的平均售價將比原平均售價少 2.5 元」，可知陰影部分 A 的面積＝陰影部分 B 的面積，即 $2.5a=2(\frac{100}{a}-2.5)$。



陰影部分 A 的面積＝陰影部分 B 的面積

計算後可知 $\frac{a+2}{2}=\frac{40}{a}$，故得 $a(a+2)=80$。因 a 必為正整數且 $80=1\times 80=2\times 40$ $=4\times 20=5\times 16=8\times 10$，所以可推得 a=8。

【解 3】

若一盤原有 a 顆橘子，則可得知 $\frac{100}{a}-\frac{100}{a+2}=2.5=\frac{5}{2}$，即 $\frac{1}{a(a+2)}=\frac{1}{80}$，因 a 必為正整數，故知 $a(a+2)=80=1\times 80=2\times 40=4\times 20=5\times 16=8\times 10$，所以可推得 a=8。

ANS：8 顆

4. 小杰到郵局購買總值恰好為 100 元的郵票，其中 5 元郵票的張數為 12 元郵票張數的 2 倍，剩下的全是 3.5 元的郵票。請問他總共買了幾張郵票？

【解 1】

100、5 與 12 都是整數，因此 3.5 元的郵票必為偶數張，即 3.5 元的郵票總值為 7 的整數倍。因 5 元的郵票張數是 12 元的郵票張數的 2 倍，故可將二張 5 元郵

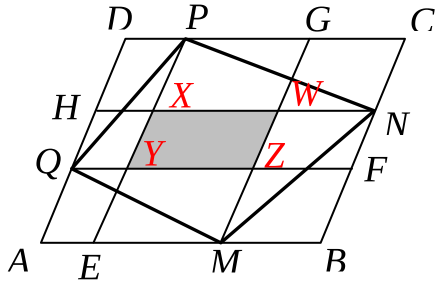
票與一張 12 元郵票視為一組，此時一組共 22 元，最多只可能有 4 組。
若有 4 組合計 88 元，剩下 12 元全買 3.5 元郵票，不合；
若有 3 組合計 66 元，剩下 34 元全買 3.5 元郵票，不合；
若有 2 組合計 44 元，剩下 56 元全買 3.5 元郵票，可買 16 張；
若有 1 組合計 22 元，剩下 78 元全買 3.5 元郵票，不合；
若有 0 組合計 0 元，剩下 100 元全買 3.5 元郵票，不合。
因此知他買了 5 元郵票 4 張、12 元郵票 2 張、3.5 元郵票 16 張，共 22 張。

【解 2】

100、5 與 12 都是整數，因此 3.5 元的郵票必為偶數張，即 3.5 元的郵票總值為 7 的整數倍。因 5 元的郵票張數是 12 元的郵票張數的 2 倍，故 5 元郵票與 12 元郵票總值為 22 的整數倍。即知存在非負整數 a 與 b 使得 $22a+7b=100$，且 a 必須小於 5。移項後可得 $b=\dfrac{100-22a}{7}=14-3a+\dfrac{2-a}{7}$。因 b 為正整數或 0，故知 a 必須取 2，所以 $b=8$。因此知他買了 5 元郵票 $2\times2=4$ 張、12 元郵票 2 張、3.5 元郵票 $8\times2=16$ 張，共 22 張。

ANS：22 張

5. 如圖，點 M、N、P、Q 分別在平行四邊形 $ABCD$ 的邊 AB、BC、CD、DA 上，且 $PE//GM//CB$、$HN//QF//AB$。若平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 600 cm^2、陰影部分面積為 80 cm^2，請問四邊形 $MNPQ$ 的面積為多少 cm^2？



【解】

可知 MN、NP、PQ、QM 依序分別為平行四邊形 $MBNW$、$XNCP$、$QYPD$、$AMZQ$ 的對角線，因此三角形 MNW、PXN、QYP、QZM 的面積總和為空白部分的一半，即四邊形 $MNPQ$ 的面積為 $\dfrac{600-80}{2}+80=340$ cm^2。

ANS：340 cm^2

6. 某學校的學生排成一個實心的長方形陣，規定站在由前往後數為偶數列且由左往右數為偶數行位置的學生都必須舉黃色的牌子，其餘的學生則舉藍色的牌子。若這個長方形陣內總共有 80 位學生舉黃色的牌子，請問這個長方形陣總共至多有多少位學生？

【解 1】

因 $80=1\times80=2\times40=4\times20=5\times16=8\times10$，故知可能的情況有：

(1) 1 列偶數列、80 行偶數行(或 80 列偶數列、1 行偶數行)：此時這個長方形陣內的學生最多有 $(1\times2+1)\times(80\times2+1)=3\times161=483$ 位；
(2) 2 列偶數列、40 行偶數行(或 40 列偶數列、2 行偶數行)：此時這個長方形陣內的學生最多有 $(2\times2+1)\times(40\times2+1)=5\times81=405$ 位；
(3) 4 列偶數列、20 行偶數行(或 20 列偶數列、4 行偶數行)：此時這個長方形陣

內的學生最多有$(4\times2+1)\times(20\times2+1)=9\times41=369$ 位；

(4) 5 列偶數列、16 行偶數行(或 16 列偶數列、5 行偶數行)：此時這個長方形陣內的學生最多有$(5\times2+1)\times(16\times2+1)=11\times33=363$ 位；

(5) 8 列偶數列、10 行偶數行(或 10 列偶數列、8 行偶數行)：此時這個長方形陣內的學生最多有$(8\times2+1)\times(10\times2+1)=17\times21=357$ 位。

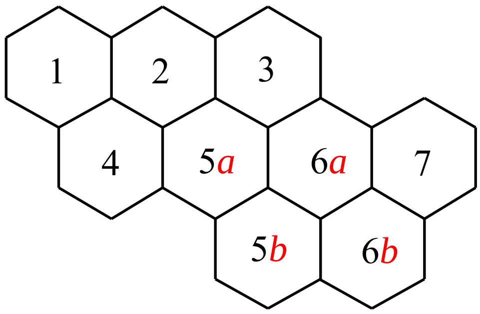
比較以上各情形，可知這個長方形陣總共的學生至多有 483 位。

【解 2】

不妨令共有 x 列的偶數列、y 行的偶數行，則知 $xy=80$ 且這個長方形陣總共的學生至多有$(2x+1)(2y+1)=4xy+2(x+y)+1=4\times80+2(x+y)+1$ 位。而因為 xy 為一個定值，所以 $x+y$ 的最大之值發生在 80×1 或 1×80 時，因此故本題最大值為 $320+162+1=483$ 位。

ANS：483 位

7. 小蜜蜂蓋了一間怪異的房子，他共有九間房間，房間的排列形狀及其編號如圖所示，且相鄰的房間都有門可以互通。若小蜜蜂想從 1 號房走到 7 號房，每間房間至多只經過一次且從一間房間進到下一間房間時，房間號碼不可以變小，但可以保持相等。請問小蜜蜂共有多少種不同的走法？



【解】

為了描述方便，不妨將兩間 5 號房與兩間 6 號房分別命名為 $5a$、$5b$、$6a$、$6b$。則共有以下走法：

A. 經過 2 號房

(1) $1\to2\to3\to6a\to7$； (2) $1\to2\to3\to6a\to6b\to7$；
(3) $1\to2\to3\to5a\to6a\to7$； (4) $1\to2\to3\to5a\to6a\to6b\to7$；
(5) $1\to2\to3\to5a\to5b\to6a\to7$； (6) $1\to2\to3\to5a\to5b\to6a\to6b\to7$；
(7) $1\to2\to3\to5a\to5b\to6b\to7$； (8) $1\to2\to3\to5a\to5b\to6b\to6a\to7$；
(9) $1\to2\to4\to5a\to6a\to7$； (10) $1\to2\to4\to5a\to6a\to6b\to7$；
(11) $1\to2\to4\to5a\to5b\to6a\to7$； (12) $1\to2\to4\to5a\to5b\to6a\to6b\to7$；
(13) $1\to2\to4\to5a\to5b\to6b\to7$； (14) $1\to2\to4\to5a\to5b\to6b\to6a\to7$；
(15) $1\to2\to5a\to6a\to7$； (16) $1\to2\to5a\to6a\to6b\to7$；
(17) $1\to2\to5a\to5b\to6a\to7$； (18) $1\to2\to5a\to5b\to6a\to6b\to7$；
(19) $1\to2\to5a\to5b\to6b\to7$； (20) $1\to2\to5a\to5b\to6b\to6a\to7$；

B. 不經過 2 號房

(21) $1\to4\to5a\to6a\to7$； (22) $1\to4\to5a\to6a\to6b\to7$；
(23) $1\to4\to5a\to5b\to6a\to7$； (24) $1\to4\to5a\to5b\to6a\to6b\to7$；
(25) $1\to4\to5a\to5b\to6b\to7$； (26) $1\to4\to5a\to5b\to6b\to6a\to7$；

ANS：26 種

8. 有三個正整數之和為 878。請問這三個正整數的乘積之末尾最多可能有幾個 0？

【解】

因 878 不為 5 的倍數，故知這三個正整數最多只會有二個數是 5 的倍數。而三個正整數的乘積末尾 0 的個數是由將這個乘積因式分解後，5 的次方及 2 的次方所決定。因 $5^2=25$、$5^3=125$、$5^4=625$ 而 $5^5=3125>878$、$625+625=1250>878$，故知 5 的次方最大可能為 $3+4=7$，因此末尾最多可能有 7 個 0。而這可將這三個數取 625、125、128 即能得到末尾有 7 個 0。。 ANS：7

9. 數學競賽命題委員由 3 名教授組成，他們將試題鎖在一個保險箱裡，保險箱上可安裝許多道鎖，一把鑰匙只可以開一道鎖，但要求至少有 2 名命題教授在場時才能打開保險箱且一定可打開。請問保險箱至少要安裝上多少道鎖？每位委員要擁有其中幾把鑰匙？(兩項答案全對才給分)

【解】

若只有 1 道鎖，則只要一名教授到場即可打開，不合；

若只有 2 道鎖 A、B，則因要求僅一位教授到場無法打開，故知每位教授只能拿 A 或 B 的一把鑰匙，即至少有二位教授是拿同一道鎖的鑰匙，故若當這二位教授到場時，因拿的是同一道鎖的鑰匙故無法打開，不合；

若只有 3 道鎖 A、B、C，則可讓第一位教授拿 A、B 的鑰匙，第二位教授拿 A、C 的鑰匙，第三位教授拿 B、C 的鑰匙，則任一位教授到場無法打開，且只要任二位教授到場即可打開這 3 道鎖。

ANS：至少需 3 道鎖，每位教授擁有其中 2 把鑰匙。

10. 至多有 2 個連續的正整數，每個數的數碼和都不可被 2 整除，例如：9、10。請問至多有多少個連續的正整數，每個數的數碼和都不可被 7 整除？

【解】

對於連續正整數的個位數是從 0 依序到 9 之間的情形下，因連續的正整數之各位數碼和為依序增加 1，因此最多可有連續 6 個正整數之各位數碼和都不會被 7 整除；而若連續正整數中包含有個位數從 9 至 0 的情形下，此時的數碼和會減少而不是繼續增加 1，故最多可有 $6+6=12$ 個連續正整數之各位數碼和都不會被 7 整除，例如 994、995、996、997、998、999、1000、1001、1002、1003、1004、1005 這 12 個連續正整數之各位數碼和依序為 22、23、24、25、26、27、1、2、3、4、5、6，都不是 7 的倍數。

ANS：12

11. 若一個四位數 $\overline{abcd}$ 由左至右愈來愈小，即 $a>b>c>d$，則稱此數為「幸運數」。請問共有多少個不同的幸運數？

【解 1】

不妨將 $\overline{abcd}$ 看作為 a、b、$\overline{cd}$ 的組合。

若 $a=9$，可知：

(i) 當 $b=8$，則 $\overline{cd}$ =10、20 至 21、30 至 32、40 至 43、50 至 54、60 至 65、70 至 76，共 1＋2＋3＋4＋5＋6＋7=28 個幸運數；

(ii) 當 $b=7$，則 $\overline{cd}$ =10、20 至 21、30 至 32、40 至 43、50 至 54 及 60 至 65，共 1＋2＋3＋4＋5＋6=21 個幸運數；

(iii) 當 $b=6$，則 $\overline{cd}$ =10、20 至 21、30 至 32、40 至 43 及 50 至 54，共 1＋2＋3＋4＋5=15 個幸運數；

(iv) 當 $b=5$，則 $\overline{cd}$ =10、20 至 21、30 至 32 及 40 至 43，共 1＋2＋3＋4=10 個幸運數；

(v) 當 $b=4$，則 $\overline{cd}$ =10、20 至 21 及 30 至 32 ，共 1＋2＋3=6 個幸運數；

(vi) 當 $b=3$，則 $\overline{cd}$ =10 及 20 至 21，共 1＋2=3 個幸運數；

(vii) 當 $b=2$，則 $\overline{cd}$ =10，共 1 個幸運數；

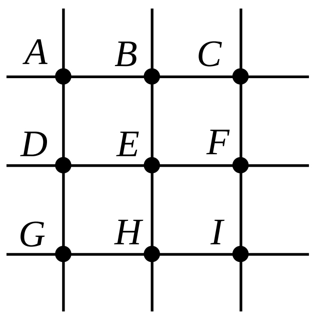
若 $a=8$，則有以上(ii)至(vii)的情形；若 $a=7$，則有以上(iii)至(vii)的情形；若 $a=6$，則有以上(iv)至(vii)的情形；若 $a=5$，則有以上(v)至(vii)的情形；若 $a=4$，則有以上(vi)至(vii)的情形；若 $a=3$，則有以上(vii)的情形。因此幸運數共有：$(1+2+3+4+5+6+7)\times 1+(1+2+3+4+5+6)\times 2+(1+2+3+4+5)\times 3+(1+2+3+4)\times 4+(1+2+3)\times 5+(1+2)\times 6+1\times 7=28+42+45+40+30+18+7=210$ 個。

【解 2】

若從 0 至 9 這 10 個數碼任取四個數碼，再將這四個數碼由左至右愈來愈小排列，則每一種取法皆可對應出一個幸運數。因此幸運數共有 $C_4^{10}=\dfrac{10!}{4!6!}=210$ 個。

ANS：210 個

12. 如圖，在方格表中標示了 A、B、C、D、E、F、G、H、I 共九個點。請問以這九個點中的三個點為頂點所組成的所有三角形中，直角三角形與不是直角三角形共相差多少個？(註：位置不同的三角形視為不同)



【解 1】

以這九個點中的三個點為頂點所組成的三角形，三點不可以共線。先考慮不是直角三角形的數量，分兩種情況討論：

1. 其中二個頂點在同一行或同一列

   若此二點為 A、B、C 三點中的兩點。若 A、B 為其中的二個頂點，則不是直角三角形的三角形第三個頂點必為與 C 點同行，即 F 或 I，共有 2 個；以 B、C 為其中的二個頂點時，則不是直角三角形的三角形第三個頂點必為與 A 點同行，即 D 或 G，共有 2 個；而以 A、C 為其中的二個頂點時，則不是直角三角形的三角形第三個頂點必為與 B 點同行，但三角形 ACE 為直角三角形，故只有三角形 ACH 不為直角三角形，共有 1 個。故三角形的頂點為 A、B、C 三點中的兩點的情形合計共 2＋2＋1= 5 個不是直角三角形。

根據對稱原理，若此二點為 G、H、I 三點中的兩點、為 A、D、G 三點中的兩點、為 C、F、I 三點中的兩點的情況亦各有 5 個不是直角三角形。

若此二點為 D、E、F 三點中的兩點。若 D、E 為其中的二個頂點，則不是直角三角形的三角形第三個頂點必為與 C 點同行，即 C 或 I，共有 2 個；以 E、F 為其中的二個頂點時，則不是直角三角形的三角形第三個頂點必為與 A 點同行，即 A 或 G，共有 2 個；而以 D、F 為其中的二個頂點時，則不是直角三角形的三角形第三個頂點必為與 B 點同行，但三角形 BDF 與 HDF 都為直角三角形，故沒有三角形，故三角形的頂點為 D、E、F 三點中的兩點的情形合計共 $2+2=4$ 個不是直角三角形。

根據對稱原理，若此二點為 B、E、H 三點中的兩點的情況亦各有 4 個不是直角三角形。

所以二個頂點在同一行或同一列的情形共 $5\times4+4\times2=28$ 個不是直角三角形。

2. 三個頂點都不在同一行或同一列

此情況只有三角形 AHF、CDH、GBF 與 IDB 等 4 個不是直角三角形。

故在此方格表中合計共 $28+4=32$ 個三角形不是直角三角形。

九點任取三個點的取法共有 $C_3^9=\dfrac{9!}{3!6!}=84$ 個。因三點共線無法組成三角形，因此僅可組成 $84-8=76$ 個三角形。故在此方格表中共有 $76-32=44$ 個三角形是直角三角形。直角三角形與不是直角三角形共相差 $44-32=12$ 個。

【解 2】

先考慮直角三角形的數量。

現先觀察 A 點。可知以 A 點為直角的三角形的頂點必為 B、C 中的一點以及 D、G 中的一點，合計共 $2\times2=4$ 個。因此可推知以 A、C、G、I 點為直角的三角形共有 $4\times4=16$ 個。

接著再觀察 B 點。以 B 點為直角的三角形的頂點除了為 A、C 中的一點以及 E、H 中的一點，合計 $2\times2=4$ 個以外，尚有△BDF 也是以 B 點為直角的三角形，因此共有 5 個。故可推知以 B、D、F、H 為直角的三角形共有 $5\times4=20$ 個。

而以 E 點為直角的三角形的頂點除了為 D、F 中的一點以及 B、H 中的一點，合計 $2\times2=4$ 個以外，尚有△EAC、△EAG、△EGI 與△ECI 等 4 個也是直角三角形，因此共有 8 個。

故在此方格表中共有 16+20+8=44 個三角形是直角三角形。九點任取三個點的取法共有 $C_3^9=\dfrac{9!}{3!6!}=84$ 個。因三點共線無法組成三角形，因此僅可組成 $84-8=76$ 個三角形。因此有 $76-44=32$ 個三角形不是直角三角形。直角三角形與不是直角三角形共相差 $44-32=12$ 個。

ANS：12 個