

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2013 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第一試：應用題（考試時間 90 分鐘）

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 小丁在 16 歲生日的那天(年齡為 16 歲)向爸爸要求購買一輛摩托車作為生日禮物。爸爸回答說：「不行，等我的年齡是你的三倍時，我才會買給你。」爸爸現年 52 歲，請問再過幾年小丁才可能得到爸爸買給他的摩托車？

【解 1】

可知小丁現年 16 歲，他今年年紀的 3 倍為 $16 \times 3 = 48$ 歲，比爸爸現年 52 歲還少了 4 歲。而每過 1 年，小丁年紀的 3 倍會增加 3，而爸爸的年紀增加 1，故可知每過 1 年，爸爸的年紀與小丁年紀的 3 倍之差會減少 2，故可進一步推知需再過 $4 \div 2 = 2$ 年，這個差便會歸 0，即爸爸的年紀是小丁年紀的 3 倍。

【解 2】

爸爸的年紀與小丁年紀相差 $52 - 16 = 36$ 歲，經過若干年後爸爸的年紀是小丁年紀的三倍，其差為二倍，則可得知當時小丁年紀為 $36 \div 2 = 18$ ，即再過 2 年。

【解 3】

假設需再過了 a 年，則可得知 $52 + a = 3(16 + a) = 48 + 3a$ ，所以可得 $a = 2$ 。

ANS：2 年

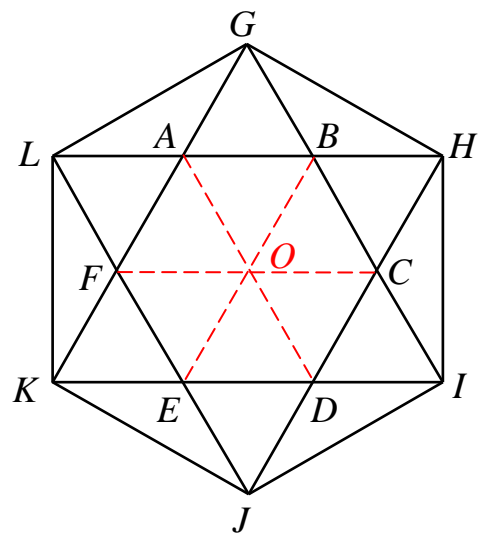
2. 在正六邊形 $ABCDEF$ 上，在每一條邊上往外作正三角形後，依次連結 G 、 H 、 I 、 J 、 K 、 L 而得到一個大的六邊形 $GHIJKL$ ，如圖所示。若正六邊形 $ABCDEF$ 的面積為 36 cm^2 ，請問大六邊形 $GHIJKL$ 的面積為多少 cm^2 ？

【解 1】

因六邊形 $ABCDEF$ 為正六邊形且 $\triangle GAB$ 為以 AB 為邊長的正三角形，故知正六邊形 $ABCDEF$ 的面積為 6 倍的 $\triangle GAB$ 的面積。

而再由六邊形 $ABCDEF$ 為正六邊形知 $AB = AF$ ，即可得知 $AB = AL$ ，故 $\triangle GAL$ 的面積與 $\triangle GAB$ 的面積相等，即 $\triangle GAL$ 的面積為 2 倍的 $\triangle GAB$ 的面積。據此，可推知大六邊形 $GHIJKL$ 的面積是 $2 \times 6 + 6 = 18$ 倍的 $\triangle GAB$ 的面積，因此大六邊形 $GHIJKL$ 的面積是正六邊形 $ABCDEF$ 的面積的 3 倍，即 108 cm^2 。

【解 2】連接 AD 、 BE 、 CF 。因 $ABCDEF$ 為正六邊形，故這三條對角線會交於同一點 O ，而此點即為正六邊形的中心，且可推知每一個小三角形的面積都相等。故可得知正六邊形 $ABCDEF$ 的面積為 6 倍的 $\triangle OAB$ 的面積、即 $\triangle OAB$ 的面積為 $36 \div 6 = 6 \text{ cm}^2$ 。正六邊形 $GHIJKL$ 的面積等於 $\triangle OAB$ 面積的 18 倍，因此大六邊形 $GHIJKL$ 的面積等於 $6 \times 18 = 108 \text{ cm}^2$ 。



ANS：108 cm^2

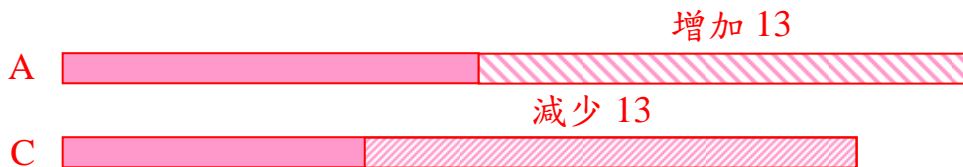
3. A 對 B 說：「如果我以 6 隻豬與您交換 1 匹馬，則您的牲畜數量是我的 2 倍。」
 C 對 A 說：「如果我以 14 隻羊與您交換 1 匹馬，則您的牲畜數量是我的 3 倍。」
 B 對 C 說：「如果我以 4 隻牛與您交換 1 匹馬，則您的牲畜數量是我的 6 倍。」
 請問 A、B、C 三人共有多少隻牲畜？

【解 1】

因 A 若以 6 隻豬與 B 交換 1 匹馬，則知 A 的牲畜減少 5 隻、B 的牲畜增加 5 隻，此時可得以下圖示：

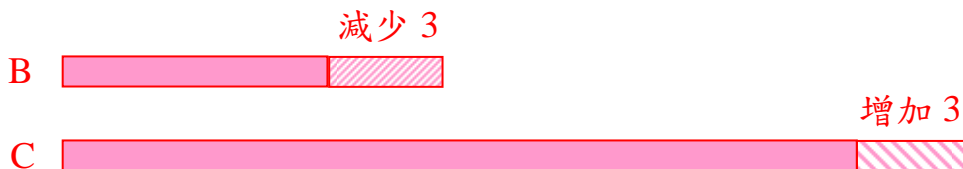


若令 A 的牲畜數為 a ，則可以推知 B 的牲畜數為 $2(a-5)-5=2a-15$ ；
 因 C 若以 14 隻羊與 A 交換 1 匹馬，則知 A 的牲畜增加 13 隻、C 的牲畜減少 13 隻，此時可得以下圖示：



若令 A 的牲畜數為 a ，則可以推知 C 的牲畜數為 $\frac{a+13}{3}+13=\frac{a+52}{3}$ ；

因 B 若以 4 隻牛與 C 交換 1 匹馬，則知 B 的牲畜減 3 隻、C 的牲畜增加 3 隻，此時可得以下圖示：



若令 A 的牲畜數為 a ，則可以推知 B、C 的牲畜數之間的關係式為

$$6((2a-15)-3)=\frac{a+52}{3}+3$$

$$3(12a-108)=a+61$$

$$a=11$$

所以 A 有 11 隻牲畜、B 有 $2 \times 11 - 15 = 7$ 隻牲畜、C 有 $\frac{11+52}{3} = 21$ 隻牲畜，合計共有 $11 + 7 + 21 = 39$ 隻。

【解 2】

可令 A、B 交換後 A 有 x 隻牲畜、B 有 $2x$ 隻牲畜，則知 A 原有 $x-1+6=x+5$ 隻牲畜、B 原有 $2x-6+1=2x-5$ 隻牲畜，此時便可知：

- (i) A、C 交換後 A 有 $(x+5)-1+14=x+18$ 隻牲畜，故此時 C 有 $\frac{x+18}{3}$ 隻牲畜，

所以 C 原有 $(\frac{x+18}{3})-1+14 = \frac{x+57}{3}$ 隻牲畜；

(ii) B、C 交換後 B 有 $(2x-5)-4+1=2x-8$ 隻牲畜，故此時 C 有 $12x-48$ 隻牲畜，所以 C 原有 $(12x-48)-4+1=12x-51$ 隻牲畜。

由以上可推知 $\frac{x+57}{3} = 12x-51$ ，解之可得 $x=6$ 。因此 A 原有 $6+5=11$ 隻牲畜、B 原有 $6 \times 2 - 5 = 7$ 隻牲畜、C 原有 $6 \times 12 - 51 = 21$ 隻牲畜，共有 $11+7+21=39$ 隻。

ANS: 39 隻

4. 彩虹國的幣制非常奇怪，它的 1 枚紅幣等於 7 美元、它的 1 枚橙幣等於 7 個紅幣、它的 1 枚黃幣等於 7 枚橙幣、它的 1 枚綠幣等於 7 枚黃幣、它的 1 枚藍幣等於 7 枚綠幣、它的 1 枚靛幣等於 7 枚藍幣、它的 1 枚紫幣等於 7 枚靛幣。有一個人以 840000 美元全部兌換成彩虹國的貨幣，但錢幣的總枚數要求最少。請問他所換的錢幣中，共有多少枚藍幣？

【解】

可知 1 枚紅幣等於 7 美元、1 枚橙幣等於 7^2 美元、1 枚黃幣等於 7^3 美元、1 枚綠幣等於 7^4 美元、1 枚藍幣等於 7^5 美元、1 枚靛幣等於 7^6 美元、1 枚紫幣等於 7^7 美元。可判斷出要錢幣個數要愈少，則幣值較大的要兌換愈多愈好。

因 $840000 = 7 \times 120000$ ，故知 840000 美元可全部兌換成 120000 枚紅幣；

因 $120000 = 7 \times 17142 + 6$ ，故知 120000 枚紅幣最多可兌換 17142 枚橙幣而剩下 6 個紅幣；

因 $17142 = 7 \times 2448 + 6$ ，故知 17142 枚橙幣最多可兌換 2448 枚黃幣而剩下 6 枚橙幣；

因 $2448 = 7 \times 349 + 5$ ，故知 2448 枚黃幣最多可兌換 349 枚綠幣而剩下 5 枚黃幣；

因 $349 = 7 \times 49 + 6$ ，故知 349 枚綠幣最多可兌換 49 枚藍幣而剩下 6 枚綠幣；

因 $49 = 7 \times 7$ ，故知 49 枚藍幣最多可兌換 7 枚靛幣而沒有剩下藍幣；

因 $7 = 7 \times 1$ ，故知 7 枚靛幣最多可兌換 1 枚紫幣而沒有剩下靛幣；

因此 840000 美元兌換出的彩虹國貨幣，最少為 $1+0+0+6+5+6+6=24$ 枚，其中並沒有藍幣。

【註】以上結論也可利用如圖所示的方式(七進制)推得

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 840000} \\ 7 \overline{) 120000} \\ 7 \overline{) 17142} \dots\dots 6 \leftarrow \text{紅幣數} \\ 7 \overline{) 2448} \dots\dots 6 \leftarrow \text{橙幣數} \\ 7 \overline{) 349} \dots\dots 5 \leftarrow \text{黃幣數} \\ 7 \overline{) 49} \dots\dots 6 \leftarrow \text{綠幣數} \\ 7 \overline{) 7} \dots\dots 0 \leftarrow \text{藍幣數} \\ 1 \dots\dots 0 \leftarrow \text{靛幣數} \\ \uparrow \\ \text{紫幣數} \end{array}$$

ANS: 0 枚

5. 將大小相同的圓球堆成類似正四角錐的尖塔，最下層由 10×10 顆球組成，最上層只有 1 顆球。請問此尖塔總共有多少顆圓球？

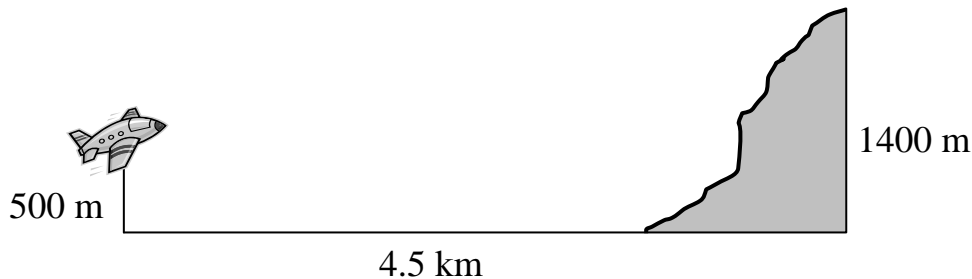
【解】

此尖塔每一層的球的每行每列的球數都比下一層少 1 顆，因此這一個尖塔共有 $10 \times 10 + 9 \times 9 + 8 \times 8 + 7 \times 7 + 6 \times 6 + 5 \times 5 + 4 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 = 100 + 81 + 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 385$ 顆圓球。

【註】 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。當 $n=10$ 時， $\frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$ 。

ANS : 385 顆

6. 一架無人偵察機已升空至離地 500 m 的高度，在它 4.5 km 外有一座高度為 1400 m 的高山。若這一架偵察機的垂直分速恆為 60 km/h，則這架偵察機要成功飛越這一座高山，請問它的水平分速至多為多少 km/h？



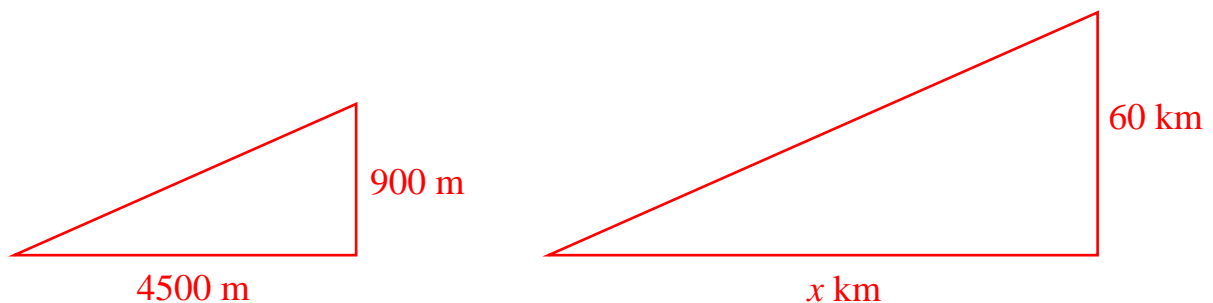
【解 1】

因這一架偵察機仍須升高 $1400 - 500 = 900 \text{ m} = 0.9 \text{ km}$ 才能越過這一座山，至少需耗時 $\frac{0.9}{60} = 0.015$ 小時，故知需至少在 0.015 小時內飛過 4.5 km，故其水平分速

需至多為 $\frac{4.5}{0.015} = 300 \text{ km/h}$ 。

【解 2】

可知這架偵察機在飛行 4500 的距離內至少要上升 900 m，此時可視為下左圖所示的情況。當這架偵察機的垂直分速為 60 km/h 時，若它的水平分速為 $x \text{ km/h}$ ，則其情況可用下右圖表示。



這兩個三角形必須相似，則這架偵察機才能正好飛越這座山，因此它的水平分速必須至多為 $\frac{4500}{900} \times 60 = 300 \text{ km/h}$ 。

ANS : 300 km/h

7. 請問從 100 到 2013 之間的數裡，共有多少個數含有數碼 7？

【解 1】

先觀察 100 至 199 的數中，共有 107、117、127、137、147、157、167、170 至 179、187、197 共 19 個數有數碼 7，因此可推知 100 至 699、800 至 1699 與 1800 至 1999 之間，共有 $19 \times 17 = 323$ 個數有數碼 7。而百位數為 7 的數有 700 至 799 與 1700 至 1799 之間共計 200 個，另外 2000 至 2013 間，僅有 2007 一個數有數碼 7，因此合計共 $323 + 200 + 1 = 524$ 個。

【解 2】

可知從 100 到 2013 之間的正整數共有 $2013 - 99 = 1914$ 個，其中完全沒有 7 的正整數個數可利用以下方式來考慮：

在 100 到 999 之間，因首位數不可為 0 與 7，故首位數有 8 種選擇，而其餘的位數不可為 7，故有 9 種選擇。故完全沒有 7 的正整數共有 $8 \times 9 \times 9 = 648$ 個。

在 1000 到 1999 之間，因第二、三、四位數不可為 7，故有 9 種選擇。故完全沒有 7 的正整數共有 $9 \times 9 \times 9 = 729$ 個。

在 2000 到 2013 之間，僅有 2007 這一個數有數碼 7，故完全沒有 7 的正整數共有 13 個。

所以共有 $1914 - 648 - 729 - 13 = 524$ 個數的各位數碼中至少有一個數碼是 7。

ANS：524 個

8. 若正整數 N 有 20 個正因數而 $2N$ 有 25 個正因數，請問 $15625 \times N$ 的乘積中末尾有多少個 0？

【解】

若 2 不是 N 的因數，則 $2N$ 的正因數個數應為 N 的正因數個數的 2 倍；但 25 不為 20 的 2 倍，因此 2 是 N 的因數，故可推知，若令在 N 的因數分解式中，2 的指數是 a ，則 $a + 1$ 是 20 的因數而 $a + 2$ 是 25 的因數，即 $\frac{a+2}{a+1} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$ ，可得

$4a + 8 = 5a + 5$ ，故 $a = 3$ 。因 $15625 = 5^6$ ，故知 $15625 \times N$ 的乘積中末尾有 3 個 0。

ANS：3 個

9. 有一家餐廳的老闆一時興起，對在座用餐的 25 位顧客宣布：在座的每一對夫妻贈送 1260 元折價券，其它的每位單身的女性贈送 300 元折價券、每位單身的男性贈送 180 元折價券。最後老闆恰好送出 12000 元折價券。請問當時此餐廳內的顧客共有多少對夫妻？

【解】

因為老闆贈送每一對夫妻 1260 元折價券，且恰好送出 12000 元折價券，故可由 $1260 \times 9 < 12000 < 1260 \times 10$ 知至多僅可以有 9 對夫妻；

而若 25 位顧客全都是單身女性，則至多送出 $300 \times 25 = 7500$ 元折價券，但老闆最後送出 12000 元折價券，尚少送出 $12000 - 7500 = 4500$ 元，故知至少有一對顧客是夫妻。餐廳內每多出一對夫妻，老闆就要多送出 $1260 - 300 \times 2 = 660$ 元折價券，因此由 $660 \times 6 < 4500 < 660 \times 7$ 知至少有 7 對夫妻；

若恰有 9 對夫妻，則知剩下的 7 位顧客都是單身男性或女性，且老闆送給這 7

位顧客共 $12000 - 1260 \times 9 = 660$ 元折價券。但因老闆對 7 位顧客至少送出折價券 $180 \times 7 > 660$ 元，故不合。

若恰有 8 對夫妻，則知剩下的 9 位顧客都是單身男性或女性，且老闆送給這 9 位顧客共 $12000 - 1260 \times 8 = 1920$ 元折價券。若這 9 位顧客都是單身女性，則老闆應送出 $300 \times 9 = 2700$ 元折價券，比實際送出的折價券多了 $2700 - 1920 = 780$ 元，這是因為其中有幾位男性顧客在假設中被視為女性所產生的誤差，因此單身男性顧客有 $\frac{780}{300-180} = \frac{13}{2}$ 位，不為正整數，故不合。

若恰有 7 對夫妻，則知剩下的 11 位顧客都是單身男性或女性，且老闆送給這 11 位顧客共 $12000 - 1260 \times 7 = 3180$ 元折價券。若這 11 位顧客都是單身女性，則老闆應送出 $300 \times 11 = 3300$ 元折價券，比實際送出的折價券多了 $3300 - 3180 = 120$ 元，這是因為其中有幾位男性顧客在假設中被視為女性所產生的誤差，因此單身男性顧客有 $\frac{120}{300-180} = 1$ 位、單身女性顧客有 $11 - 1 = 10$ 位。

ANS : 7 對

10. 有一個正整數 n ，它的數碼和與 $n + 1$ 的數碼和都可被 7 整除。請問滿足上述條件最小的 n 值是什麼？

【解】

對於正整數 n 的個位數是從 0 依序到 8 之間的情形下， $n + 1$ 之數碼和為增加 1，因此若正整數 n 與 $n + 1$ 的數碼和都可被 7 整除，即可推知僅發生在 n 的個位數為 9、 $n + 1$ 的個位數為 0 時。故可令 $n = \overline{A9}$ ，其中 $A + 1$ 的數碼和可被 7 整除、 A 的數碼和加 9 可被 7 整除。

若正整數 A 的個位數是從 0 依序到 8 之間的情形下，因 $A + 1$ 的數碼和為 A 的數碼和加 1，故由 $A + 1$ 的數碼和可被 7 整除知 A 的數碼和被 7 除時餘數為 6，但由 A 的數碼和加 9 可被 7 整除知 A 的數碼和被 7 除時餘數為 5，矛盾，因此正整數 A 的個位數為 9。故可令 $n = \overline{A9} = \overline{B99}$ ，其中 $B + 1$ 的數碼和可被 7 整除、 B 的數碼和加 18 可被 7 整除。

若正整數 B 的個位數是從 0 依序到 8 之間的情形下，因 $B + 1$ 的數碼和為 B 的數碼和加 1，故由 $B + 1$ 的數碼和可被 7 整除知 B 的數碼和被 7 除時餘數為 6，但由 B 的數碼和加 18 可被 7 整除知 B 的數碼和被 7 除時餘數為 3，矛盾，因此正整數 B 的個位數為 9。故可令 $n = \overline{A9} = \overline{B99} = \overline{C999}$ ，其中 $C + 1$ 的數碼和可被 7 整除、 C 的數碼和加 27 可被 7 整除。

若正整數 C 的個位數是從 0 依序到 8 之間的情形下，因 $C + 1$ 的數碼和為 C 的數碼和加 1，故由 $C + 1$ 的數碼和可被 7 整除知 C 的數碼和被 7 除時餘數為 6，但由 C 的數碼和加 27 可被 7 整除知 C 的數碼和被 7 除時餘數為 1，矛盾，因此正整數 C 的個位數為 9。故可令 $n = \overline{A9} = \overline{B99} = \overline{C999} = \overline{D9999}$ ，其中 $D + 1$ 的數碼和可被 7 整除、 D 的數碼和加 36 可被 7 整除。

若正整數 D 的個位數是從 0 依序到 8 之間的情形下，因 $D + 1$ 的數碼和為 D 的數碼和加 1，故由 $D + 1$ 的數碼和可被 7 整除知 D 的數碼和被 7 除時餘數為 6，

且由 D 的數碼和加 36 可被 7 整除知 D 的數碼和被 7 除時餘數為 6，兩條件皆可滿足。因 n 的最小值即發生在 D 的最小值，故取 $D = 6$ ，即 $n = 69999$ 、 $n + 1 = 70000$ 。

ANS : 69999

11. 若一個四位數 \overline{abcd} 由左至右愈來愈大，即 $a < b < c < d$ ，則稱此數為「步步高升數」。請問共有多少個不同的步步高升數？

【解 1】

不妨將 \overline{abcd} 看作為 \overline{ab} 、 c 、 d 的組合。

若 $d = 9$ ，可知：

- (i) 當 $c = 8$ ，則 $\overline{ab} = 12$ 至 17、23 至 27、34 至 37、45 至 47、56 至 57、67，共 $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ 個步步高升數；
- (ii) 當 $c = 7$ ，則 $\overline{ab} = 12$ 至 16、23 至 26、34 至 36、45 至 46、56，共 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 個，此時 d 可以等於 8 或 9，故共有 30 個步步高升數；
- (iii) 當 $c = 6$ ，則 $\overline{ab} = 12$ 至 15、23 至 25、34 至 35、45，共 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ 個，此時 d 可以等於 7、8 或 9，故共有 30 個步步高升數；
- (iv) 當 $c = 5$ ，則 $\overline{ab} = 12$ 至 14、23 至 24、34，共 $3 + 2 + 1 = 6$ 個，此時 d 可以等於 6、7、8 或 9，故共有 24 個步步高升數；
- (v) 當 $c = 4$ ，則 $\overline{ab} = 12$ 、13、23，共 $2 + 1 = 3$ 個，此時 d 可以等於 5、6、7、8 或 9，故共有 15 個步步高升數；
- (vi) 當 $c = 3$ ，則 $\overline{ab} = 12$ ，共 1 個，此時 d 可以等於 4、5、6、7、8 或 9，故共有 6 個步步高升數；

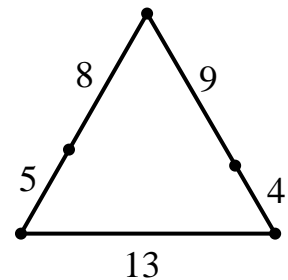
因此步步高升數共有 $21 + 30 + 30 + 24 + 15 + 6 = 126$ 個。

【解 2】

可知 a 不為 0，否則便不是四位數；再因 a 之值為最小，故知此即為在從 1 至 9 這九個數碼中任取四個數碼，再將這四個數碼由左至右愈來愈大排列，則每一種取法皆可對應出一個步步高升數。因此步步高升數共有 $C_4^9 = \frac{9!}{4!5!} = 126$ 個。

ANS : 126 個

12. 利用 4 cm、5 cm、8 cm、9 cm 及 13 cm 的木棒各一根，可用如下圖方式拼出一個正三角形。現有長度為 1 cm、2 cm、3 cm、4 cm、5 cm、6 cm 及 7 cm 的木棒各一根，從這些木棒中取出全部或部分來拼出正三角形，請問共有多少種不同的取法？



【解】

這七根木棒的總長度為 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ cm，因此正三角形的邊長最多為 9 cm。此時可造表如下：

邊長	木棒拼出邊長的拼法	可拼出正三角形的取法數	可拼出的正三角形拼法
9 cm	7+2、6+3、6+2+1、5+4、 5+3+1、4+3+2	1	7+2、6+3、5+4
8 cm	7+1、6+2、5+3、5+2+1、4+3+1	1	7+1、6+2、5+3
7 cm	7、6+1、5+2、4+3、4+2+1	4	7、6+1、5+2
			7、6+1、4+3
			7、5+2、4+3
			6+1、5+2、4+3
6 cm	6、5+1、4+2、3+2+1	1	6、5+1、4+2
5 cm	5、4+1、3+2	1	5、4+1、3+2
4 cm	4、3+1	0	無
3 cm	3、2+1	0	無
2 cm	2	0	無
1 cm	1	0	無

故知共有 $1 + 1 + 4 + 1 + 1 = 8$ 種不同的取法。

ANS: 8 種

2013 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第二 試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

1. 小明在國際機場檢到一張紙，發現上面寫有一道乘法的算式，如圖所示。小明研判這是某個國家的小學生遺失的計算紙，算式中不同的記號代表不同的數碼。請將該算式改寫成阿拉伯數字的正確算式。

$$\begin{array}{r}
 \text{Y} \text{ 9} \text{ 3} \\
 \times \quad \text{9} \text{ Y} \\
 \hline
 \text{2} \text{ Y} \text{ 6} \text{ Y} \\
 \text{Y} \text{ 9} \text{ 3} \\
 \hline
 \text{9} \text{ 6} \text{ 9} \text{ Y}
 \end{array}$$

【解】

將此算式改寫如下，其中不同的英文字母代表不同的數碼。

$$\begin{array}{r}
 \text{A} \text{ B} \text{ C} \\
 \times \quad \text{B} \text{ A} \\
 \hline
 \text{D} \text{ A} \text{ E} \text{ A} \\
 \\
 \hline
 \text{A} \text{ B} \text{ C} \\
 \text{F} \text{ E} \text{ G} \text{ A}
 \end{array}$$

現由算式可知 $\overline{ABC} \times B = \overline{ABCA}$ ，因此 $B=1$ 。此時算式為

$$\begin{array}{r}
 \text{A} \text{ 1} \text{ C} \\
 \times \quad \text{1} \text{ A} \\
 \hline
 \text{D} \text{ A} \text{ E} \text{ A} \\
 \text{A} \text{ 1} \text{ C} \\
 \hline
 \text{F} \text{ E} \text{ G} \text{ A}
 \end{array}$$

因 A 、 C 皆不為 1 且 A 不為 0，由 $A \times C$ 的個位數仍為 A ，故可知 $(A, C) = (2, 6)$ 、 $(4, 6)$ 、 $(5, 3)$ 、 $(5, 7)$ 、 $(5, 9)$ 或 $(8, 6)$ 。現再觀察 $\overline{A1C} \times A = \overline{DAEA}$ ，可知 A^2 的個位數碼為 A 或 $A-1$ 。而因 $2^2 = 4$ 、 $3^2 = 9$ 、 $4^2 = 16$ 、 $5^2 = 25$ 、 $6^2 = 36$ 、 $7^2 = 49$ 、 $8^2 = 64$ 、 $9^2 = 81$ ，故知 $A=5$ 或 6 。由以上推論可知 $A=5$ ，且可得 $D=2$ 、 $F=7$ 。此時算式為

$$\begin{array}{r}
 \text{5} \text{ 1} \text{ C} \\
 \times \quad \text{1} \text{ 5} \\
 \hline
 \text{2} \text{ 5} \text{ E} \text{ 5} \\
 \text{5} \text{ 1} \text{ C} \\
 \hline
 \text{7} \text{ E} \text{ G} \text{ 5}
 \end{array}$$

因 $E + C \leq 8 + 9 = 17$ ，故由積的百位數知 $5 + 1 = 6 \leq E \leq 5 + 1 + 1 = 7$ 。因 $F=7$ ，故可得 $E=6$ 。此時算式為

$$\begin{array}{r}
 \text{5} \text{ 1} \text{ C} \\
 \times \quad \text{1} \text{ 5} \\
 \hline
 \text{2} \text{ 5} \text{ 6} \text{ 5} \\
 \text{5} \text{ 1} \text{ C} \\
 \hline
 \text{7} \text{ 6} \text{ G} \text{ 5}
 \end{array}$$

現由 $2565 \div 5 = 513$ 知 $C=3$ ，故 $G=9$ 。此時即可得到算式為

$$\begin{array}{r}
 513 \\
 \times 15 \\
 \hline
 2565 \\
 5130 \\
 \hline
 7695
 \end{array}$$

註：此為尼泊爾的數碼記號。

2. 請將數 1~12 不重複地填寫在右圖正立方體的每條邊上，使得正立方體每個面四條邊上的數之總和都相等。

【解】

若將每個面上的數之總和都是 S ，則六個面的和為 $6S$ ，此時每條邊都相加了 2 次，因此可知

$$6S = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12)$$

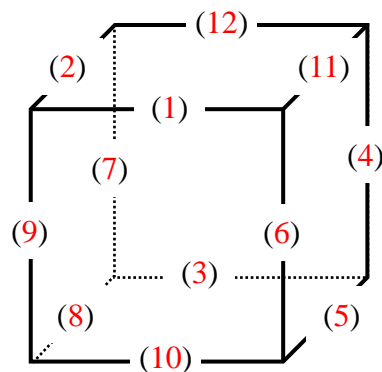
$$6S = 2 \times 13 \times 6$$

$$S = 26$$

可知

$$\begin{aligned}
 26 &= 12 + 11 + 2 + 1 = 12 + 10 + 3 + 1 = 12 + 9 + 4 + 1 = 12 + 9 + 3 + 2 = 12 + 8 + 5 + 1 \\
 &= 12 + 8 + 4 + 2 = 12 + 7 + 6 + 1 = 12 + 7 + 5 + 2 = 12 + 7 + 4 + 3 = 12 + 6 + 5 + 3 \\
 &= 11 + 10 + 4 + 1 = 11 + 10 + 3 + 2 = 11 + 9 + 5 + 1 = 11 + 9 + 4 + 2 = 11 + 8 + 6 + 1 \\
 &= 11 + 8 + 5 + 2 = 11 + 8 + 4 + 3 = 11 + 7 + 6 + 2 = 11 + 7 + 5 + 3 = 11 + 6 + 5 + 4 \\
 &= 10 + 9 + 6 + 1 = 10 + 9 + 5 + 2 = 10 + 9 + 4 + 3 = 10 + 8 + 7 + 1 = 10 + 8 + 6 + 2 \\
 &= 10 + 8 + 5 + 3 = 10 + 7 + 6 + 3 = 10 + 7 + 5 + 4 = 9 + 8 + 7 + 2 = 9 + 8 + 6 + 3 \\
 &= 9 + 8 + 5 + 4 = 9 + 7 + 6 + 4 = 8 + 7 + 6 + 5
 \end{aligned}$$

現可先將 1 到 12 先分為 6 組，每組兩個數之和為 13，從中選取四組並將這四組的兩個數填入上下底面的正方形的對邊上，這樣上下底面上 4 個數之和均為 26，接下來再利用上表搭配設法使四個側面的 4 個數之和均為 26 即可。答案並不唯一，如圖為一種可行的填數方式。



3. 有 101 枚外觀完全相同的金幣，其中 100 枚為重量都相同的真幣，另 1 枚為重量不同之假幣。請問如何利用沒有刻度的天平秤兩次而分辨出假幣比真幣輕或重？

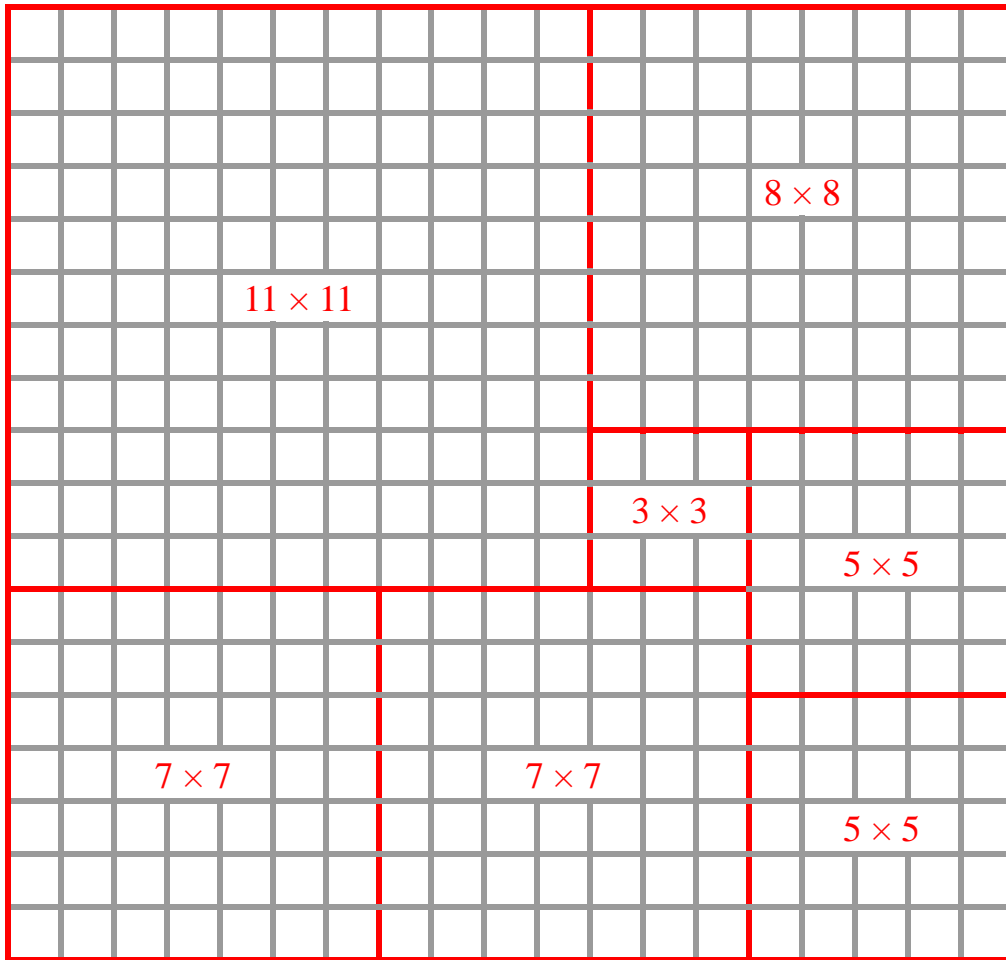
【解】

第一次秤時，在天平兩端各放置 50 枚金幣。

- (a) 若平衡，則剩下未秤的一枚是假幣，第二次秤時，將假幣放置一端、任取一枚真幣放在另一端便得知輕重；
- (b) 若不平衡，第二次秤時將較重的 50 枚金幣分成各有 25 枚金幣的兩堆並放置在天平兩端，若平衡，則假幣在第一次秤時較輕的 50 枚金幣那堆，且假幣比真幣輕；若不平衡，則假幣在第二次秤時較重的 25 枚金幣那堆，且假幣比真幣重。

4. 請將 18×19 的方格表沿格線分割為若干個正方形，使得正方形的個數愈少愈好。請在下表中畫出您的分割方法。

【解】



正確地切出 7 片----25 分

正確地切出 8 片----15 分

正確地切出 9 片----10 分

正確地切出 10 片----5 分

11 片及以上 0 分