2013 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第　一　試　應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 一對夫妻的生日在同一天。在今年生日時，丈夫對妻子說：「再過 2 年我們兩人的年齡總和就達到 100 歲了。」妻子說：「是呀，時間過的真快，想當年你是我現在的年紀時，我的年齡才只是你的 $\frac{5}{7}$ 倍。」請問丈夫現年幾歲？

【解】

可知夫妻兩人今年合計 96 歲。而由妻子說的話可知，妻子今年的年紀為 7 的倍數，故可令妻子今年為 $7a$ 歲，且可推知丈夫比妻子大 $2a$ 歲，即丈夫今年 $9a$ 歲，故可得 $9a + 7a = 16a = 96$，即 $a = 6$。因此丈夫今年 54 歲。

ANS：54 歲

2. 非洲有一個原始部落的文字中只有 4 個不同的符號，它的每個單詞都由不超過 5 個符號構成。請問此部落的文字中，至多有多少個不同的單詞？

【解】

由一個符號所構成的單詞共有 4 個、由二個符號所構成的單詞共有 $4 \times 4 = 16$ 個、由三個符號所構成的單詞共有 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 個、由四個符號所構成的單詞共有 $4 \times 4 \times 4 \times 4= 256$ 個、由五個符號所構成的單詞共有 $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$ 個，合計共 $4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = 1364$ 個。

ANS：1364 個

3. 七矮人圍在一圓桌前玩輪盤遊戲。當輪盤上的指針指到誰，誰就要出錢把其他六人所有的錢加倍。經過七次之後，怪事發生了，每個人都恰好被指針指到一次，且每個人身上的錢都足夠支付其他人，最後每個人身上的錢全都一樣為 128 元。請問在開始玩第一次之前，錢第二多的小矮人身上有多少元？

【解】

不妨令指到的順序為 A、B、C、D、E、F、G，且最後七人的錢依序為(128, 128, 128, 128, 128, 128, 128)，則在指到 G 之前，七人的錢依序為(64, 64, 64, 64, 64, 64, 512)，在指到 F 之前，七人的錢依序為(32, 32, 32, 32, 32, 480, 256)，在指到 E 之前，七人的錢依序為(16, 16, 16, 16, 464, 240, 128)，在指到 D 之前，七人的錢依序為(8, 8, 8, 456, 232, 120, 64)，在指到 C 之前，七人的錢依序為(4, 4, 452, 228, 116, 60, 32)，在指到 B 之前，七人的錢依序為(2, 450, 226, 114, 58, 30, 16)，在指到 A 之前，七人的錢依序為(449, 225, 113, 57, 29, 15, 8)。故知在第一次玩之前，錢第二多的小矮人身上有 225 元。

ANS：225 元

4. 四位兄弟合資買了一輛變速自行車，老大所出的錢是其他三人所出的錢的總和之一半、老二所出的錢是其他三人所出的錢的總和之$\frac{1}{3}$、老三所出的錢是其他三人所出的錢的總和之$\frac{1}{4}$、小弟則出了 2600 元。請問老大出了多少元？

【解】

因老大所出的錢是其他三人所出的錢的總和之一半，故知老大所出的錢是全部的$\frac{1}{3}$；因老二所出的錢是其他三人所出的錢的總和之$\frac{1}{3}$，故知老二所出的錢是全部的$\frac{1}{4}$；因老三所出的錢是其他三人所出的錢的總和之$\frac{1}{4}$，故知老二所出的錢是全部的$\frac{1}{5}$；故知小弟所出的錢是全部的$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=1-(\frac{20+15+12}{60})=\frac{13}{60}$。再因小弟一共出了 2600 元，故知全部的錢為$2600\div\frac{13}{60}=12000$元，所以老大所出的錢是$12000\times\frac{1}{3}=4000$元。

ANS：4000 元

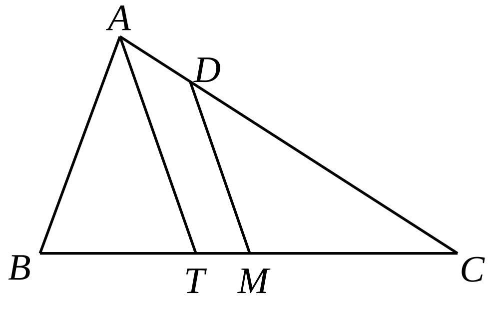
5. $\underbrace{32\times32\times32\times\cdots\times32}_{32個32}$的乘積除以 9 所得的餘數為多少？

【解 1】因 $32=2^5$，故$\underbrace{32\times32\times32\times\cdots\times32}_{32個32}=\underbrace{2^5\times2^5\times2^5\times\cdots\times2^5}_{32個\,2^5}=2^{160}$。因 $2^6=64$ 除以 9 的餘數為 1，且 $160=6\times26+4$，因此2^{160}除以 9 所得的餘數與$2^4=16$除以 9 所得的餘數相同，即為 7。

【解 2】因 $32=9\times3+5$，故$\underbrace{32\times32\times32\times\cdots\times32}_{32個32}$除以 9 所得的餘數與$\underbrace{5\times5\times5\times\cdots\times5}_{32個5}=5^{32}$除以 9 所得的餘數相同。因 $5^6=15625$ 除以 9 的餘數為 1，且 $32=6\times5+2$，故5^{32}除以 9 所得的餘數與$5^2=25$除以 9 所得的餘數相同，即為 7。

ANS：7

6. 如圖，在三角形 ABC 中，$AB=10$ cm、$AC=18$ cm，且 M 為 BC 中點。若三角形 ABT 與三角形 ACT 的面積比為 5：9 且 D 為 AC 上一點使得 $DM//AT$，請問 AD 的長度是多少 cm？



【解】由三角形 ABT 與 ACT 的面積比為 5：9 可知 $BT：TC=5：9$。因 M 為 BC 中點，故可知 $CM：CT=(9+5)\div2：9=7：9$。再因 $DM//AT$，故知 $CD：CA=CM：CT=7：9$，所以 $AD=18\times\frac{(9-7)}{9}=4$ cm。

ANS：4 cm

7. 如圖，將大小相同的圓球堆成類似正三角錐的尖塔。若共有 2013 個圓球，最上面一層只有一顆，請問最多可以堆出幾層？

【解】

可知由上往下數第 1 層有 1 個圓球、第 2 層有 $1+2=3$ 個圓球、第 3 層有 $1+2+3=6$ 個圓球、…、第 k 層有 $1+2+3+\cdots+k$ $=\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{k^2}{2}+\dfrac{k}{2}$ 個圓球。故第 1 到 k 層共有 $\dfrac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+k^2)+\dfrac{1}{2}(1+2+\cdots+k)$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{2\times 6}+\dfrac{k(k+1)}{2\times 2}=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$。

因 $\dfrac{21\times 22\times 23}{6}=1771<2013<\dfrac{22\times 23\times 24}{6}=2024$，故知最多有 21 層。

ANS：21 層

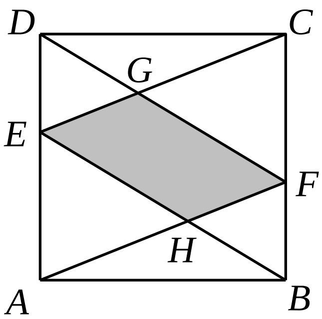
8. 四個數碼的彩券如果號碼成 $\overline{abab}$ 的形式(包括 a=b)便可獲獎，其中 a、b 可以是 0～9 的數碼。請問至少要購買多少張連號的彩券才能保證獲獎？

【解】

若 b 不為 9，則 $\overline{abab}$ 的下一張中獎號碼為 $\overline{a(b+1)a(b+1)}$，共相差 101 號；若 b 為 9，則 $\overline{a9a9}$ 的下一張中獎號碼為 $\overline{(a+1)0(a+1)0}$，共相差 101 號。因此至少要購買 101 張連號的彩券才能保證獲獎。

ANS：101 張

9. 如圖所示，若正方形 $ABCD$ 的邊長為 30 cm，且 $AE=\dfrac{3}{5}AD$、$BF=\dfrac{2}{5}BC$，請問陰影部分面積是多少 cm^2？



【解】

因 $AE=\dfrac{3}{5}AD=\dfrac{3}{5}BC=CF$ 且 $AE//CF$，故知 $AECF$ 為平行四邊形，即 $GE//AF$，故△DEG 的面積為△DAF 的面積的 $(\dfrac{2}{5})^2=\dfrac{4}{25}$；因 $BF=\dfrac{2}{5}BC=\dfrac{2}{5}AD=DE$ 且 $DE//BF$，故知 $EBFD$ 為平行四邊形，即 $EH//DF$，故△AEH 的面積為△DAF 的面積的 $(\dfrac{3}{5})^2=\dfrac{9}{25}$。因此陰影部分面積為△$DAF$ 的面積的 $1-\dfrac{4}{25}-\dfrac{9}{25}=\dfrac{12}{25}$；再因△$DAF$ 的面積為正方形 $ABCD$ 的面積的 $\dfrac{1}{2}$，故陰影部分面積為正方形 $ABCD$ 的面積的 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{25}=\dfrac{6}{25}$，因此陰影部分面積為 $30\times 30\times\dfrac{6}{25}=216\ \text{cm}^2$。

ANS：216 cm^2

10. 彩虹國的幣制非常奇怪，它的 1 枚紅幣等於 7 美元、它的 1 枚橙幣等於 8 枚紅幣、它的 1 枚黃幣等於 9 枚橙幣、它的 1 枚綠幣等於 10 枚黃幣、它的 1 枚藍幣等於 11 枚綠幣、它的 1 枚靛幣等於 12 枚藍幣、它的 1 枚紫幣等於 13 枚靛幣。有一個人以 840000 美元全部兌換成彩虹國的貨幣，但錢幣的總枚數要求最少。請問他所換的錢幣中，共有多少枚藍幣？

【解】

可判斷出要錢幣個數要愈少，則幣值較大的要兌換愈多愈好。

因 $840000 = 7 \times 120000$，故知 840000 美元可全部兌換成 120000 枚紅幣；

因 $120000 = 8 \times 15000$，故知 120000 枚紅幣最多可兌換 15000 枚橙幣而沒有剩下紅幣；

因 $15000 = 9 \times 1666 + 6$，故知 15000 枚橙幣最多可兌換 1666 枚黃幣而剩下 6 枚橙幣；

因 $1666 = 10 \times 166 + 6$，故知 1666 枚黃幣最多可兌換 166 枚綠幣而剩下 6 枚黃幣；

因 $166 = 11 \times 15 + 1$，故知 166 枚綠幣最多可兌換 15 枚藍幣而剩下 1 枚綠幣；

因 $15 = 12 \times 1 + 3$，故知 15 枚藍幣最多可兌換 1 枚靛幣而剩下 3 枚藍幣；

因靛幣只有 1 枚，故知無法兌換紫幣；

因此 840000 美元兌換出的彩虹國貨幣，最少為 $0 + 1 + 3 + 1 + 6 + 6 + 0 = 17$ 枚，其中有 3 枚藍幣。

【註】以上結論也可利用如下圖所示的方式推得

7 | 840000
8 | 120000
9 | 15000……0 ⇦ 紅幣數
10 | 1666……6 ⇦ 橙幣數
11 | 166……6 ⇦ 黃幣數
12 | 15……1 ⇦ 綠幣數
13 | 1……3 ⇦ 藍幣數
0……1 ⇦ 靛幣數
⇧
紫幣數

ANS：3 枚

11. 有三種中國的古錢幣，在古董店中，11 枚有圓洞的錢幣的售價為 1500 美元、11 枚有正方形洞的錢幣的售價為 1600 美元、11 枚有三角形洞的錢幣的售價為 1700 美元。老王買了若干枚這樣的古幣，恰好花費 1100 美元。請問他買的古幣中，有幾枚是有三角形洞的？

【解】

為了計算方便，不妨令 1 美元為 11 怪元，則可得知 1 枚有圓洞的錢幣的售價為 1500 怪元、1 枚有正方形洞的錢幣的售價為 1600 怪元、1 枚有三角形洞的錢幣的售價為 1700 怪元。因老王恰好花費 $1100 \times 11 = 12100$ 怪元，則由 $1500 \times 8 = 12000 < 12100 < 1500\times9 = 13500$、$1600 \times 7 = 11200 < 12100 < 1600 \times 8 = 12800$、

$1700\times7=11900<12100<1700\times8=13600$ 知這三種錢幣他至多共買 8 枚，至少共買 7 枚。

若共買 7 枚，則可知若全為圓洞的古幣時，共花費 $7\times1500+0\times1600+0\times1700=10500$ 怪元，比實際所花費的 12100 怪元少了 1600 怪元。因每少買一個圓洞錢幣而改買一個正方形洞或三角形洞錢幣時，需多花費 100 怪元或 200 怪元，因此至少需多買 $1600\div200=8$ 個正方形洞錢幣，換言之，至少需少買 8 個圓洞錢幣，矛盾，故不合；

若共買 8 枚，則可知若全為圓洞的古幣時，共花費 $8\times1500+0\times1600+0\times1700=12000$ 怪元，比實際所花費的 12100 怪元少了 100 怪元。同樣因每少買一個圓洞錢幣而改買一個正方形洞或三角形洞錢幣時，需多花費 100 怪元或 200 怪元，因此知恰僅需多買 1 個正方形洞錢幣，此時即花費 $7\times1500+1\times1600+0\times1700=12100$ 怪元。

因此知老王所買的古幣中，7 枚是有圓洞的、1 枚是有正方形洞的、0 枚是有三角形洞的錢幣。

ANS：0 枚

12. 請問至多有多少個連續的正整數其數碼和都不可被 11 整除？

【解】

因數碼和不可被 11 整除，即要求數碼和被 11 除所得的餘數為 1 至 10。

而因連續正整數中，除了末尾為 9 的情形外，數碼和會依序增加 1，故現考慮末尾為 9 的個數。

最佳的情形為在末尾為 9 的下一個數，被 11 除所得的餘數為 1；再因個位數為 9 而末二位數不為 99 時，下一個數的數碼和為減少 8，故可往後繼續數 19 個數；而往前數最多可有 18 個數，合計共 38 個數。而末尾 9 的個數為 n 個時，下一個數的數碼和會減少 $9n-1$，因此知可取 $n=6$，此時這 38 個數可取為 999981 至 1000018。

ANS：38

2013 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

______縣市______國民小學__年級　編號：______姓名：__________性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、3 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

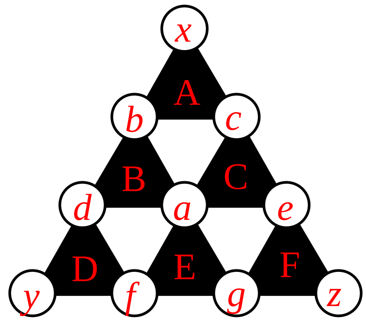
1. 有 101 枚外觀相同的金幣，其中有 50 枚為假幣。已知每枚真幣重量都相同，而有些假幣的重量比真幣重 1 g、其餘的假幣都比真幣輕 1 g。現有一架帶有指針的兩臂天平，可以顯示天平兩端放置物品的重量之差。小王隨意從中取出一枚金幣，想要利用這一架天平秤一次來判斷他所取出的金幣真假。請問他是否能夠做到？若能做到，該如何操作？若不能做到，請解釋理由。

【解】

因假幣可能比真幣重 1 g 或輕 1 g，即 1 枚重假幣較 1 枚輕假幣重 2 g，因此若天平的指數為偶數時，可推知兩端的金幣重量總和為偶數，故重假幣與輕假幣之間的數量差為偶數，若天平的指數為奇數時，可推知兩端的金幣重量總和為奇數，故重假幣與輕假幣之間的數量差為奇數。

小王取出一枚金幣後將剩下的 100 枚金幣分為兩堆，每堆各 50 枚放上天平秤。若小王取出的金幣為真幣，則其餘 100 枚金幣中仍有 50 枚假幣，故重假幣與輕假幣之間的數量差為偶數，即天平的指數為偶數；若小王取出的金幣為假幣，則其餘 100 枚金幣中有 49 枚假幣，故重假幣與輕假幣之間的數量差為奇數，即天平的指數為奇數。

2. 請將整數 0～9 不重複地填入下圖中的十個圓圈內，使得各個黑色三角形三個頂點上的數之和都相等，且此和要最大。



【解】如圖，分別將黑色三角形標示上 A、B、C、D、E、F。若令每一個黑色三角形內的和為 S，則：

由三角形 A、D、F 可觀察出

$3S=(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)-a=45-a$

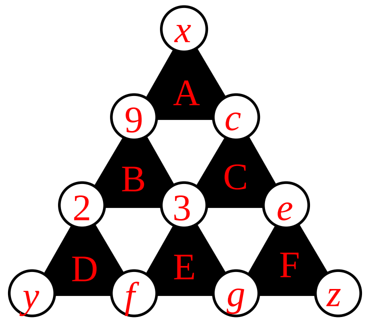
即知 a 必為 3 的倍數。

由三角形 B、C、E 可觀察出

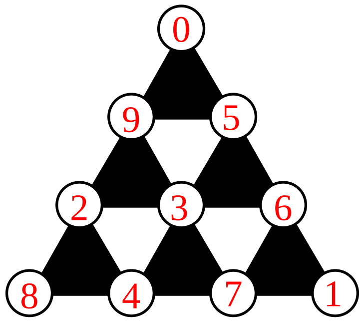
$3S=(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)-(x+y+z)+2a=45-(x+y+z)+2a$

故知 $x+y+z=3a$。

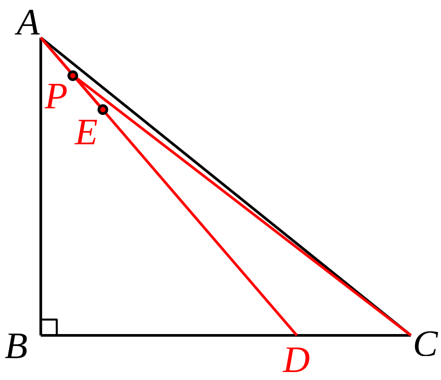
因 $0+1+2\le x+y+z\le 7+8+9$，故知 $1\le a\le 8$，即 $a=3$ 或 6。現要求 S 為最大值，故先考慮 $a=3$。此時 $S=14$、$x+y+z=9$，且三角形 B、C、E 的另兩點之和皆為 11。因 $a=3$，故 11 僅可有三種寫成二個數之和的表示法：$2+9$、$4+7$、$5+6$，即三角形 B、C、E 上的另兩點各恰為以



上其中一種組合，且也可進一步推知 x、y、z 為 0、1、8。不失一般性，可令 9、2 位於三角形 B 上，如圖所示，故由三角形 A 知 $x \neq 8$。再因 $a = 3$ 可知 $x = 0$，因此 $c = 5$，故 $e = 6$，此時由三角形 F 知 $z \neq 8$，因此 $z = 1$，故 $g = 7$ 且 $y = 8$，最後便可得知 $f = 4$，如圖所示。



3. 若在△ABC 中，$\angle B = 90°$，請問能否在△ABC 的內部找到一點 P、在 BC 邊上找一點 D，使得 $PD + PC > AB + AC$？若能找到，請找出一個例子並證明所找出的例子滿足題意；若不能找到，亦請證明無論如何都不存在。



【解】

如圖，在 BC 邊上任取一點 D。因△ABC 為以 $\angle B$ 為直角的直角三角形，故知 AC 為斜邊且 $AC > AD > AB$，因此可在 AD 上取一點 E 使得 $AB = DE$。現令 P 為 AE 的中點，則 $PC + PD = PC + PE + DE = PC + PA + AB$；而在△$APC$ 中，由三角形兩邊和必大於第三邊知 $PC + PA > AC$，故知 $PC + PD = PC + PA + AB > AC + AB$。

4. 數學競賽命題委員由 A、B、C、D、E 共 5 名教授組成，他們將試題鎖在一個保險箱裡，保險箱上可安裝許多道鎖，一把鑰匙只可以開一道鎖，但要求至少有 3 名命題教授在場時才能打開保險箱且一定可打開。請問保險箱至少要安裝上多少道鎖？每位委員要擁有其中幾把鑰匙且如何分配這些鑰匙？

【解】可知每一名教授不可擁有同一把鎖的 2 把或 3 把的鑰匙，否則只要這一名教授與另一名擁有這一道鎖的另一把鑰匙的教授未到，便無法打開保險箱。而若鎖的數目為 9 道，則有 27 把鑰匙，根據抽屜原理，至少有一名教授擁有至少 6 把鎖，不妨假設他有 a、b、c、d、e、f 這六道鎖的鑰匙而沒有 g、h、i 這三道鎖的鑰匙。而 g、h、i 這三道鎖的鑰匙共有 3 × 3＝9 把，分給其它的四名教授，則至少有一名教授會有 3 把，即 g、h、i 這三道鎖的鑰匙全都有，此時，只要這兩名教授到場即可打開保險箱，這是不允許的。故 9 道鎖不可能，便可進一步推出低於 9 道鎖也不可能，故至少需 10 道鎖，可利用下表分配方式：

未到的教授 / 教授	(A, B)	(A, C)	(A, D)	(A, E)	(B, C)	(B, D)	(B, E)	(C, D)	(C, E)	(D, E)
A	×	×	×	×	e	f	g	h	i	j
B	×	b	c	d	×	×	×	h	i	j
C	a	×	c	d	×	f	g	×	×	j
D	a	b	×	d	e	×	g	×	i	×
E	a	b	c	×	e	f	×	h	×	×

ANS：至少需 10 道鎖，每位教授擁有其中 6 把鑰匙。