2014 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第 一 試 應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 從 A 市到 B 市，如果汽車以每小時 40 km 的勻速行駛，則會遲到 1 小時，如果汽車以每小時 60 km 的勻速行駛，則會早到 1 小時。請問汽車應以每小時多少 km 的勻速行駛才能恰好準時抵達？

【解 1】

可知以每小時 40 km 的勻速行駛時，每 km 行駛時間為 $\frac{1}{40}$ 小時；以每小時 60 km 的勻速行駛時，每 km 行駛時間為 $\frac{1}{60}$ 小時。因恰好準時抵達即為分別以這兩個速度行駛所需時間的平均時間，故知每 km 行駛時間為 $(\frac{1}{40}+\frac{1}{60})\div 2=\frac{1}{48}$ 小時，即應以每小時 48 km 的勻速行駛才能恰好準時抵達。

【解 2】

若以預定行駛時間行駛時，以每小時 40 km 的勻速行駛尚未抵達 B 市且離 B 市 40 km、以每小時 60 km 的勻速行駛已越過 B 市且離 B 市 60 km，即後者多行駛了 100 km。因後者比前者每小時多行駛 20 km，故知預定行駛時間為 100÷20=5 小時，所以兩市之間的距離為 60×(5－1)=40×(5+1)=240 km，因此汽車應以每小時 240÷5=48 km 的勻速行駛才能恰好準時抵達。

【解 3】

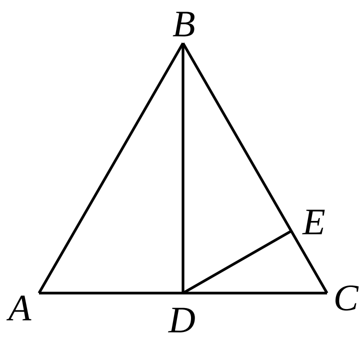
若令預定行駛時間為 x 小時，則知 $40(x+1)=60(x-1)$，化簡得 $20x=100$，即 $x=5$，所以兩市之間的距離為 60×(5－1)=40×(5+1)=240 km，因此汽車應以每小時 $240\div 5=48$ km 的勻速行駛才能恰好準時抵達。

【解 4】

若兩地之間為 y km，則知 $\frac{y}{40}-\frac{y}{60}=2$，化簡得 $3y-2y=240$，即 $y=240$，所以預定行駛時間為 $\frac{240}{40}-1=\frac{240}{60}+1=5$ 小時，因此汽車應以每小時 $240\div 5=48$ km 的勻速行駛才能恰好準時抵達。

答：48 km

2. 邊長為 4 cm 的正三角形 ABC 中，BD 為 AC 上的高，而 DE 為三角形 BCD 中 BC 邊上的高，如圖所示。請問以 DE 為一邊的正方形面積是多少 cm^2？



【解 1】

可知三角形 ABD 和三角形 CBD 為兩個全等的三角形，因此 $AD=CD=2$ cm。由勾股定理可知

$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=2\sqrt{3}\text{ cm}$，因此三角形 ABC 的面積為 $\frac{1}{2}AC\times BD$ 而三角形 CBD 的面積為 $\frac{1}{2}CB\times DE$。因三角形 CBD 的面積是三角形 ABC 的面積的一半，故知 $DE=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$，因此以 DE 為一邊的正方形面積為 $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3\text{cm}^2$。

【解 2】

可知以 DE 為一邊的正方形面積為 DE^2。而利用三角形 BCD 的面積可以得知，$\frac{BC\times DE}{2}=\frac{BD\times CD}{2}$，即 $DE=\frac{BD\times CD}{BC}=\frac{1}{2}BD$，因此 $DE^2=\frac{1}{4}BD^2$；

再因三角形 ABC 為正三角形，故知 D 必為 BC 的中點，所以 $CD=2\text{ cm}$，再由勾股定理可得知 $BD^2=BC^2-CD^2=4^2-2^2=12$，故 $DE^2=\frac{1}{4}\times 12=3(\text{cm}^2)$。

答：3 cm^2

3. 甲、乙兩地有高速鐵路，每隔相同時間都會互開一列車。假設列車都以相同的勻速行進，列車上的乘客發現在途中每 10 分鐘都有一列從對面來的列車通過。請問從甲地每間隔多少時間開出一列火車駛向乙地？

【解 1】

若從甲地開出的火車全都在同一時間停止於軌道上，而從乙地開出的火車繼續依相同的勻速行進，則知它們之間相對的速度都變為原來的一半，此時列車上的乘客會發現每 20 分鐘都有一列從對面來的列車通過，即兩地都每間隔 20 分鐘開出一列火車駛向對方。

【解 2】

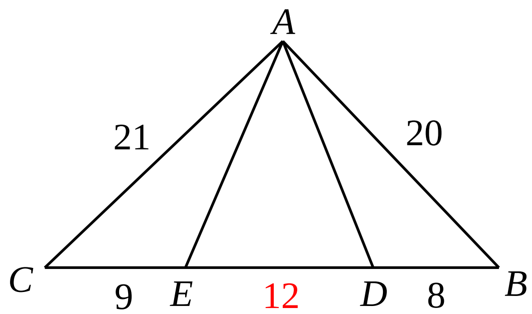
以從甲地開出的火車作基準，當它第一次遇到從乙地開出的火車時，經過 10 分鐘才會第二次與從乙地開出的火車相遇，此情況相當於兩列車都以相同的勻速相向行駛，故它們之間的距離一輛火車必須行駛 20 分鐘，即兩地都每間隔 20 分鐘開出一列火車駛向對方。

【解 3】

假設每間隔 t 分鐘有一列火車從甲地到乙地，火車每分鐘行駛 v km，則知當相鄰的兩列火車之間的距離為 vt km，即當乙地到甲地的火車與甲地到乙地的火車相遇時，與下一列相遇的火車相距 vt km，故可得知 $\frac{vt}{2v}=10$，即 $t=20$。

答：20 分鐘

4. 在三角形 ABC 中，若 $BC=29\text{cm}$、$AC=21\text{cm}$、$AB=20\text{cm}$，D、E 在 BC 上且 $DB=8\text{cm}$、$CE=9\text{cm}$，如圖所示。請問 $\angle EAD$ 的度數是多少度？



【解】
可知 $DE = BC - BD - CE = 12\,\text{cm}$。而因為 $20^2 + 21^2 = 29^2$，所以由勾股定理可得知 $\angle CAB = 90°$。
因 $BE = BD + DE = BA$，故 $\angle BAE = \angle BEA$；
因 $CD = CD + ED = CA$，故 $\angle CAD = \angle CDA$。
所以有

$$\begin{aligned}\angle EAD &= 180° - \angle BEA - \angle CDA \\ &= 180° - \angle BAE - \angle CAD \\ &= 180° - (\angle BAD + \angle DAE) - (\angle CAE + \angle EAD) \\ &= 180° - (\angle BAD + \angle DAE + \angle CAE) - \angle EAD \\ &= 90° - \angle EAD\end{aligned}$$

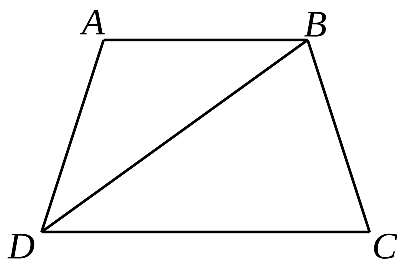
此即 $\angle EAD = 45°$。

答：$45°$

5. 請問一個二位數除以它的數碼和所得的餘數之最大值是什麼？
【解】
因二位數的數碼和最大為 18，故知所得之餘數必須不大於 17。
若數碼和為 18，則此二位數為 99。因 $99 = 18 \times 5 + 9$，故知此時餘數為 9；
若數碼和為 17，則此二位數為 98 或 89。因 $98 = 17 \times 5 + 13$、$89 = 17 \times 5 + 4$，故知此時餘數分別為 13 或 4；
若數碼和為 16，此時所得之餘數最大為 15。而因 $79 = 16 \times 4 + 15$，故知一個二位數除以它的數碼和所得的餘數之最大值 15 發生於 79 除以 16 時。

答：15

6. 在梯形 $ABCD$ 中，AB 與 CD 平行，且 $AB<CD$、$AD = BC$，如圖所示。若對角線 BD 將此梯形分成二個等腰三角形，請問 $\angle C$ 的度數是多少度？



【解】
可知在三角形 BAD 中，因 $AB < DC$ 且 AB 與 CD 平行，故知 $\angle BAD > 90°$，因此可得知 $AB = AD$。
現有 $\angle ADB = \angle ABD = \angle BDC = \frac{1}{2}\angle ADC$、
$\angle ADC = \angle BCD$，故可得

$$\begin{aligned}\angle BCD &= 180° - \angle CBD - \angle BDC \\ &= 180° - \angle BCD - \frac{1}{2}\angle BCD\end{aligned}$$

因此 $\frac{5}{2}\angle BCD = 180°$，即 $\angle BCD = 72°$。

答：$72°$

7. 甲、乙、丙三個球隊進行足球賽，每兩隊之間都各賽一場，贏隊得 2 分，敗隊得 0 分；平手則兩隊都各得 1 分。請問甲、乙兩隊之間的得分共有多少種不同的情況？

【解 1】

為了方便起見，把 A、B 兩隊的得分寫成數對的形式，其中第一項為 A 隊的得分、第二項為 B 隊的得分。可知 A、B 兩隊合計至多共得 6 分、至少共得 2 分。若兩隊平手，則可能的得分情況有(3, 3)、(2, 2)及(1, 1)。這三種情況都可能成立，只需 A、B 兩隊彼此間的對戰平手，在同時都擊敗 C 隊、都與 C 隊平手或是都被 C 隊擊敗便可得到以上這三種得分情況。若 A 隊得分比 B 隊多，則有(4, 2)、(4, 1)、(4, 0)、(3, 2)、(3, 1)、(3, 0)、(2, 1)與(2, 0)，而這 8 種得分情況也都可能發生，只要 A、B 兩隊彼此間的對戰是 A 隊擊敗 B 隊，而其餘的分數可由與 C 隊之間的對戰中獲得。而由對稱性可以得知 B 隊得分比 A 隊多的情況也是 8 種，因此可知總共有 $3+2\times8=19$ 種不同的得分情況。

【解 2】

可知一隊至多 4 分、至少 0 分。

若甲隊得 4 分，即甲隊二場全勝，故乙隊至少敗一場，即乙隊至多 2 分，因此乙隊得分情形有 0、1、2 分，共 3 種不同的可能得分情況。

若甲隊得 3 分，即甲隊一場勝一場平手，故乙隊不可能二場全勝，即乙隊至多 3 分，因此乙隊得分情形有 0、1、2、3 分，共 4 種不同的可能得分情況。

若甲隊得 2 分，即甲隊一場勝一場敗或二場平手：

(i) 若為甲隊一場勝一場敗，則乙隊不可能二場全平手，而乙隊得分情形仍有 0、1、2、3、4 分，共 5 種不同的可能得分情況。

(ii) 若為甲隊二場平手，則乙隊不可能二場全勝或二場全敗，故乙隊得分情形有 1、2、3 分，共 3 種不同的可能得分情況。

故若甲隊得 2 分，乙隊有 0、1、2、3、4 分 5 種不同可能的得分情況。

若甲隊得 1 分，即甲隊一場敗一場平手，故乙隊不可能二場全敗，即乙隊至少 1 分，因此乙隊得分情形有 1、2、3、4 分，共 4 種不同的可能得分情況。

若甲隊得 0 分，即甲隊二場全敗，故乙隊至少勝一場，即乙隊至少 2 分，因此乙隊得分情形有 2、3、4 分，共 3 種不同的可能得分情況。

因此共有 3+4+5+4+3=19 種不同的可能得分情況。

【解 3】

可知三隊的總得分共 6 分，且可觀察出，因僅三隊參與比賽，故第三隊的得分狀況與另二隊的得分情況是彼此互相影響的，因此知此即為考慮所有的得分情況。因一隊至多 4 分、至少 0 分，故觀察 6 寫成三個非負整數之和的情況，其中這三個整數至多為 4：

若為 $4+2+0$，即一隊 2 勝、一隊 1 勝 1 負、一隊 2 負，共有 6 種得分情況；

若為 $4+1+1$，即一隊 2 勝、二隊 1 負 1 平手，共有 3 種得分情況；

若為 $3+3+0$，即二隊 1 勝 1 平手、一隊 2 負，共有 3 種得分情況；

若為 $3+2+1$，即一隊 1 勝 1 平手、一隊 1 勝 1 負(或 2 平手)、一隊 1 負 1 平手，共有 6 種得分情況；

若為 $2+2+2$，即三隊都 2 平手或都 1 勝 1 負，共有 1 種得分情況；

因此共有 6+3+3+6+1=19 種不同的可能得分情況。

答：19 種

8. 請問小於 100 且恰好有 10 個正因數之所有正整數的和是什麼？

【解 1】

對於任意一個恰有 10 個正因數的數來說，所有的因數都可依序排成一個 1×10 或一個 2×5 的矩形表格。

若是排成一個 1×10 的矩形表格，則這一個數一定是一個質數的九次方數，但因 $2^9=512>100$，故不合；

若是排成一個 2×5 的矩形表格，則這一個數一定是一個質數的四次方數與另一個相異質數的乘積。此時有 $2^4\times 3=48$ 與 $2^4\times 5=80$；再因 $2^4\times 7=112$、$3^4\times 2=162$ 可判斷出沒有其它的可能了。

故知滿足題意之所有正整數的和是 48+80=128。

【解 2】

因 $10=2\times 5$，而 $10=9+1$、$2\times 5=(1+1)\times(4+1)$，故可判斷知正因數個數剛好是 10 個的正整數的質因數分解式之形式必為 p^9 或 pq^4，其中 p、q 為相異質數。

因 $p^9\ge 2^9=512>100$，故知形式為 p^9 的數必超過 100，所以滿足題意的數之質因數分解式必為 pq^4。

可知 $p\ge 2$。若 $q\ge 3$，則知 $q^4\ge 3^4=81$，即 $pq^4\ge 2\times 81=162>100$，不合，故可得知 $q=2$，也因此可判斷出 $p\ge 3$、$q^4=2^4=16$。

當 $p=3$ 時，$pq^4=3\times 16=48$；

當 $p=5$ 時，$pq^4=5\times 16=80$；

當 $p\ge 7$ 時，$pq^4\ge 7\times 16=112>100$，不合。

故知滿足題意之所有正整數的和是 48+80=128。

答：128

9. 有一位鐘錶師傅被雇用保養鐘塔上的時鐘，他在下午 6 時完工，由於天色漸暗，他竟粗心地把時針與分針卡榫對調安裝，但仍使短針指著 6、長針指著 12。第二天一大早，管理員急忙打電話這位鐘錶師傅說：「時針轉得很快，分針轉的很慢，請火速來修理。」當這位鐘錶師傅迅速在大約上午 7 時趕到現場，結果一看時間所指的時刻竟然幾乎準確無誤。他狠狠地瞪了一下管理員說：「時間是正確的。你耍我！」說完轉頭就走。請問鐘錶師傅所看到的鐘面指示的準確時刻是 7 點幾分？

【解 1】

由鐘錶師傅安裝卡榫方式可知時針的轉動速度為分針的 12 倍。而從前一天下午 6 時到隔天上午 7 時共經過了 13 小時，可知分針共轉了 390°，此時指著 1，而時針共轉了 13 圈，此時仍指著 6。與正確時間相比，時針需再多走 30°。因此到了鐘錶師傅所看到的鐘面指示的準確時刻，時針需再多走 $\dfrac{30^\circ}{12-1}$；再因時針每分鐘轉 $\dfrac{1}{2}^\circ$，故可推知此時為 7 點過後的 $\dfrac{30}{11}\div\dfrac{1}{2}=5\dfrac{5}{11}$ 分。

【解 2】

由鐘錶師傅安裝卡榫方式可知長針每小時轉30°、每分鐘轉$\frac{1}{2}^\circ$、短針每小時轉360°、每分鐘轉6°。

從前一天下午 6 時到隔天上午 7 時共經過了 13 小時，可知長針共轉了390°，此時指著 1，而短針共轉了 13 圈，此時仍指著 6，可將長針視為在短針後方150°。設再經過 m 分鐘之後，鐘錶師傅所看到的鐘面指示的時刻是準確的，則因短針比長針快，此時可將長針視為在短針後方$150^\circ+(6^\circ-\frac{1}{2}^\circ)m=150^\circ+\frac{11}{2}m^\circ$。

而正常時鐘在 7 點整時可將長針視為在短針後方210°，因正常時鐘的長針比短針快，故經過m分鐘之後，可將長針視為在短針後方$210^\circ-(6^\circ-\frac{1}{2}^\circ)m=210^\circ-\frac{11}{2}m^\circ$。

故可得$150^\circ+\frac{11}{2}m^\circ=210^\circ-\frac{11}{2}m^\circ$，化簡後得$11m=60$，即$m=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}$。

答：$5\frac{5}{11}$分

10. 已知六位數$\overline{523abc}$可同時被 7、8、9 整除，請問三位數$\overline{abc}$的最大值是什麼？

【解 1】

因 7、8、9 的最小公倍數為 504，故可知$\overline{523abc}$必可被 504 所整除。利用長除法，可得：

$$\begin{array}{r} 10 \\ 504\overline{)523abc} \\ \underline{504} \\ 19ab \end{array}$$

其中可判斷出商數的前二位數為 10、第三位數至多為 3、第四位數至多為 9，因此商的最大值為 1039。因 $1039\times 504=523656$，故知三位數$\overline{abc}$的最大值為 656。

【解 2】

因 7、8、9 的最小公倍數為 504，故可知$\overline{523abc}$必可被 504 所整除。利用長除法，可得：

$$\begin{array}{r} 1 \\ 504\overline{)523abc} \\ \underline{504} \\ 19a \end{array}$$

此時由$\overline{19a}<504$可判斷出接下來的計算中，商數須在 1 後補 0；

再由$504\times3=1512<\overline{19ab}<2016=504\times4$知接著商數須在 10 後補 3：

$$\begin{array}{r} 103 \\ 504\overline{)523abc} \\ \underline{504} \\ 19ab \\ \underline{1512} \\ mnpc \end{array}$$

其中三位數$\overline{mnp} \ge 1900 - 1512 = 388$，即四位數$\overline{mnpc} \ge \overline{388c} > 3528 = 504 \times 7$；且也可知三位數$\overline{mnp} \le 1999 - 1512 = 487$，即四位數$\overline{mnpc} \le \overline{487c} < 5040 = 504 \times 10$。故得商數可為 1038 或 1039，因此知$\overline{523abc}$的最大值為$504 \times 1039 = 523656$，即三位數$\overline{abc}$的最大值為 656。

【解 3】

因 7、8、9 的最小公倍數為 504，故可知$\overline{523abc}$必可被 504 所整除。

因$504 \times 1037 = 522648 < \overline{523abc} < 524160 = 504 \times 1040$，故可知$\overline{523abc}$的最大值為$504 \times 1039 = 523656$，即三位數$\overline{abc}$的最大值為 656。

答：656

11. 在所有四位數(從 1000 到 9999)中，有多少個數是 9 的倍數並且它的前兩位數碼之和與末兩位數碼之和相等？

【解】

可知若一個數是 9 的倍數，則其數碼和也必為 9 的倍數，因此前兩位數碼之和與末兩位數碼之和都是 9 或都是 18。若都是 18，則僅 9999 這一個數滿足；若數碼和都是 9，則前兩位數碼可為 90、81、72、63、74、45、36、27 或 18，而後兩位數碼除了以上這些數外，還多了 09 這一種情況，故知共有 $1 + 9 \times 10 = 91$ 個數。

答：91 個

12. 將正整數 1、2、3、⋯、25 不重複地填入一個 5×5 的方格表中，每個小方格內恰填入一個數，且任意連續的兩數都填入有共同邊的相鄰小方格裡。現已將 1、13、19 填入如下圖所示的位置，請問共有多少種不同的方法可將剩下來的 22 個數填入？

19		13		
		1		

【解】

可知與 19 相鄰的兩個方格必是填入 18 與 20。若 18 填在 19 的下方，則由 13 開始填至 18 的小方格所形成的路徑，會使得 20 無法繼續填到 25：

19	20	13		
18	15	14		
17	16			
		1		

19	20	13		
18		14		
17	16	15		
		1		

19	20	13	14	
18	17	16	15	
		1		

故知 20 必填在 19 的下方而 18 填在 19 的右側，這迫使 17 與 21 的填法必須如下表所示：

19	18	13		
20	17			
21				
		1		

此時可以得知與 13 相鄰且未有數填入的兩個方格必是填入 12 與 14，同上的理由可以判斷出 12 與 14 位置必如下表所示，否則無法繼續填到 17，這迫使 15、16 與 22 的填法必須如下表所示：

19	18	13	12	
20	17	14		
21	16	15		
22				
		1		

此時知 11 必須填在右上角的方格中，否則右上角的方格中無法填數。這迫使 10、9、8、7、6、5、4、3 與 2 的填法必須如下表所示。現尚餘三個尚未填數的小方格，由 23、24、25 的相對位置可判斷出與 1 相鄰的小方格必填入 24，而剩餘的二個未填數的小方格必是填入 23 或 25。故知共有 2 種不同的填法。

19	18	13	12	11
20	17	14	9	10
21	16	15	8	7
22		2	3	6
	24	1	4	5

答：2 種

2014 小學數學競賽選拔賽決賽試題解答

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、3 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 請在數碼 123456789 之間插入三個運算符號(只可以是「＋」號或是「－」號)，使得算式之值等於 100。

【解 1】

可知在插入三個運算符號後，可視為四個數的加減運算，由抽屜原理可知，這四個數中至少有一個數是三位數或四位數以上的數。若有四位數以上的數，則所得的值太大，故不予考慮；若有二個三位數，則其百位數碼之差必至少為 3，所得的值也是太大，故不予考慮。因此只須考慮恰有一個三位數的情形，且若此三位數不是 123，則所得的值仍太大，故不予考慮，因此剩下的三個數必為 45、67 與 89，且經過計算可得知所求為$123-45-67+89=100$。

【解 2】

可知在插入三個運算符號後，可視為四個數的加減運算，且其中一數的個位數為 9、一數的首位數為 1，且首位數為 1 的數恆為正數。接著可進一步推得，這四個數中若至少有一數為四位數，則插入三個運算符號後，若為正值，則最小值為$1234-5-6-789>100$，故知這四個數中沒有四位數。再由抽屜原理可知，這四個數中至少有一個數是三位數，且不可能三個運算符號全為「＋」號。

(i) 恰有二個三位數時，則另二個數必為一個二位數、一個一位數，且至少有一個運算符號為「－」號。

若二個三位數的符號全為「＋」號，則運算之最小值為$123+456-78-9>100$，故不合；

若二個三位數的符號為一個「＋」號、一個「－」號，則運算之最小正值為$1-234+567-89>100$，故不合；

若二個三位數的符號全為「－」號，則運算之值恆小於 0，故不合；

(ii) 恰有一個三位數時，則另三個數必恰為三個二位數。此時可判斷出可能的三位數有 123、345、567 或 789：

若這個三位數不是 123，則必有二位數 12。此時若這個三位數為正數，則運算之最小值為$12+345-67-89>100$；若這個三位數為負數，則因這三個二位數之和恆小於$12+200=212<345$，知運算之值恆為負數，故不合。因此可推知這個三位數必為 123，此時另三個二位數為 45、67、89。此時由所得之值的個位數為 0 可知只有兩種可能：$3-5-7+9=0$或$3+5-7+9=10$，即$123-45-67+89=100$、$123+45-67+89=190$。

故知所求為$123-45-67+89=100$。

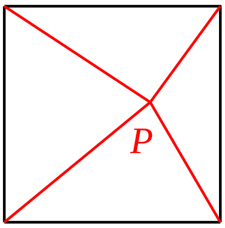
答：$123-45-67+89=100$

2. 請將一個正方形分割為若干個三角形，使得所有三角形都是鈍角三角形，且三角形的數量越少越好。

【解】

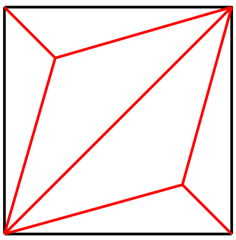
因要求分割出的三角形都是鈍角三角形，所以這些三角形中不可能有直角，故正方形的四個頂點都至少有一條直線經過，即可判斷至少會分割出 4 個三角形：

(1) 若恰分割成 4 個三角形，則正方形的四個頂點都恰有一條直線經過，且這四條直線都相交於正方形內一點 P。此時可知以點 P 為頂點的四個角中，至多有三個角是銳角，故不合；



(2) 若恰分割成 5 個三角形，這 5 個三角形的內角總和為 $5\times180°=900°$，其中不在正方形四個直角上的角度之總和為 $900°-360°=540°$，且 5 個鈍角都在這些角裡面。若正方形內部有一個點是每個三角形的頂點，則在這個點上三角形的角之總和為 $360°$。再由 $540°-360°=180°$ 可知正方形內部會有 1 個三角形的頂點在某個三角形的邊上。前一種情況的點至多可產生三個鈍角，而後一種情況的點至多可產生一個鈍角，合計至多 4 個鈍角，故不合。

(3) 故至少要分割成 6 個三角形，如圖所示是分割為六個鈍角三角形的例子。



3. 有 11 袋各分別裝有 10 枚硬幣的袋子與一台有兩個秤盤的臺秤，臺秤上有指針，可以指出哪一邊較重以及重多少重量。已知其中恰有一個袋子裡裝的全是假幣而其餘袋子中全是真幣。所有真硬幣的重量皆一樣，所有假幣也具有相同的重量但與真幣重量不同。請問至少需要秤多少次才保證可以確定哪一個袋子是假幣？(註：並不要求確定假幣比真幣輕或重，沒有秤法得 0 分。)

【解】

將這 11 個袋子依序從 0 開始編號至 10 號。

第一次從 0 到 9 號這 10 個袋子分別各取出 1 枚硬幣放在右秤盤上，再從 10 號袋子取 10 枚硬幣放在左秤盤上，因其中必有假幣，故知此時不可能平衡。現由對稱性，可假設所秤得結果為左邊秤盤比右邊秤盤重 10 g：若假幣都在 10 號袋中，則可知一個假幣比一個真幣重 1 g；若假幣不在 10 號袋中，則可知一個假幣比一個真幣輕 10 g。

接著第二次從 0 號袋子取 0 枚硬幣、1 號袋子取 1 枚硬幣、2 號袋子取 2 枚硬幣、3 號袋子取 3 枚硬幣、…、10 號袋子取 10 枚硬幣合計共 55 枚硬幣放在左秤盤

上，其餘的硬幣共 55 枚硬幣放在右秤盤上。下表為可能秤出的 11 種不同的結果，利用這 11 種不同的結果，即可以判斷出哪一個袋子中放的是假幣：

假幣所在的袋子編號	第二次秤的結果
0	左邊秤盤比右邊秤盤重 100 g
1	左邊秤盤比右邊秤盤重 80 g
2	左邊秤盤比右邊秤盤重 60 g
3	左邊秤盤比右邊秤盤重 40 g
4	左邊秤盤比右邊秤盤重 20 g
5	平衡
6	左邊秤盤比右邊秤盤輕 20 g
7	左邊秤盤比右邊秤盤輕 40 g
8	左邊秤盤比右邊秤盤輕 60 g
9	左邊秤盤比右邊秤盤輕 80 g
10	左邊秤盤比右邊秤盤輕 10 g

答：2 次

4. 將數碼 1、2、3、4、5、6、7 恰好各兩個填入下列的 14 個小方格內，使得兩個數碼 1 之間恰有一個數碼、兩個數碼 2 之間恰有二個數碼、兩個數碼 3 之間恰有三個數碼、兩個數碼 4 之間恰有四個數碼、兩個數碼 5 之間恰有五個數碼、兩個數碼 6 之間恰有六個數碼、兩個數碼 7 之間恰有七個數碼。現已將兩個數碼填入兩個小方格內，請找出將其它 12 個數碼填入的所有方法。

6													1

【解 1】

由兩個數碼 6 之間恰有六個數碼、兩個數碼 1 之間恰有一個數碼可知另一個數碼 6 與數碼 1 應填入的小方格。現將這 14 個小方格黑白相間塗色，則可得：

6							6				1		1

可知兩個偶數數碼必須一個填在黑格子、一個填在白格子；而兩個奇數數碼必須同時都填在黑格子或同時都填在白格子。故可得三種情況：

(1) 若兩個數碼 7 都填在黑格子內：

此時只有一種方式可填入兩個數碼 7：

6	7						6		7		1		1

接著可得二種填入 4 與 2 的方式，如下圖所示，可發現兩者皆無法再填入 3 與 5，故不合：

6	7	2	4		2		6	4	7		1		1
6	7		2		4	2	6		7	4	1		1

(2) 若兩個數碼 5 都填在黑格子內：

此時只有一種方式可填入兩個數碼 7，

6			5				6		5		1		1

接著觀察填入 4 與 2 的方式：

(i) 若是將 4 填入：

6	4		5			4	6		5		1		1

則 2 有兩種填法：

6	4	2	5		2	4	6		5		1		1
6	4		5		2	4	6	2	5		1		1

可發現兩者皆無法繼續填入 3 與 7，故不合；

(ii) 若是將 4 填入：

6			5		4		6		5	4	1		1

則 2 只有一種填法：

6	2		5	2	4		6		5	4	1		1

可發現無法繼續填入 3 與 7，故不合；

(3) 若兩個數碼 3 都填在黑格子內：

此時有兩種方式可填入兩個數碼 7：

(i) 若是將 3 填入：

6	3				3		6				1		1

則數碼 2 與 4 有以下三種填法：

6	3		4		3	2	6	4	2		1		1
6	3		4		3		6	4	2		1	2	1
6	3		2	4	3	2	6		4		1		1

可發現皆無法繼續填入 5 與 7，故不合；

(ii) 若是將 3 填入：

6					3		6		3		1		1

則數碼 2 與 4 只有一種填法：

6	2		4	2	3		6	4	3		1		1

接著數碼 7 只有一種填法：

6	2	7	4	2	3		6	4	3	7	1		1

接著數碼 5 只有一種填法：

6	2	7	4	2	3	5	6	4	3	7	1	5	1

此即所求是唯一的一種填法。

【解 2】

由兩個數碼 6 之間恰有六個數碼、兩個數碼 1 之間恰有一個數碼可知另一個數碼 6 與數碼 1 應填入的小方格。現將其它的小方格命名如下：

6	a	b	c	d	e	f	6	g	h	i	1	j	1

為方便起見，將小方格 a、b、c、d、e、f 稱為左側，將小方格 g、h、i、j 稱為右側。

因兩個數碼 X 之間僅有 X 個小方格，故可判斷知數碼 $X-1$ 與大於 X 的數都至多

只能有一個在兩個數碼 X 之間的小方格。

因此左側至多只能有 1 個數碼 7；再因右側不可能填入兩個數碼 7，故知左側一定有一個數碼 7。此時可觀察出兩個數碼 7 的位置有三種可能的位置：：

(1) 若兩個數碼 7 的位置為

6	7						6		7		1		1

此時可知數碼 4 必恰有一個落在兩個 6 之外，故有兩種可能的情況：

(i) 若為

6	7		4				6	4	7		1		1

則兩個數碼 2 的位置只有一種填法：

6	7	2	4		2		6	4	7		1		1

接著可知兩個數碼 3 的位置只有一種填法：

6	7	2	4		2	3	6	4	7	3	1		1

此時所留下的兩個位置必皆為數碼 5，但中間共有七個數碼，故不合；

(ii) 若為

6	7				4		6		7	4	1		1

則兩個數碼 2 的位置只有一種填法：

6	7		2		4	2	6		7	4	1		1

接著可知兩個數碼 5 的位置只有一種填法：

6	7	5	2		4	2	6	5	7	4	1		1

此時所留下的兩個位置必皆為數碼 3，但中間共有七個數碼，故不合；

(2) 若兩個數碼 7 的位置為

6		7					6			7	1		1

此時可知數碼 5 必恰有一個落在兩個 6 之外，故有兩種可能的情況：

(i) 若為

6		7	5				6		5	7	1		1

則兩個數碼 4 的位置只有一種填法：

6	4	7	5			4	6		5	7	1		1

接著可知兩個數碼 2 的位置只有一種填法：

6	4	7	5		2	4	6	2	5	7	1		1

此時所留下的兩個位置必皆為數碼 3，但中間共有七個數碼，故不合；

(ii) 若為

6		7				5	6			7	1	5	1

則兩個數碼 4 的位置有兩種可能的情況：

(a) 若為

6		7	4			5	6	4		7	1	5	1

則兩個數碼 2 的位置只有一種填法：

6	2	7	4	2		5	6	4		7	1	5	1

接著可知兩個數碼 3 的位置只有一種填法：

6	2	7	4	2	3	5	6	4	3	7	1	5	1

此為一解；

(b) 若為

6		7		4		5	6		4	7	1	5	1

則兩個數碼 2 的位置只有一種填法：

6		7		4	2	5	6	2	4	7	1	5	1

此時所留下的兩個位置必皆為數碼 3，但中間只有一個數碼，故不合；

(3) 若兩個數碼 7 的位置為

6				7			6				1	7	1

則可知數碼 5 必恰有一個落在兩個 6 之外，故有兩種可能的情況：

(i) 若為

6		5		7			6	5			1	7	1

則兩個數碼 4 的位置有兩種可能的情況：

(a) 若為

6	4	5		7		4	6	5			1	7	1

則兩個數碼 3 的位置只有一種填法：

6	4	5		7	3	4	6	5	3		1	7	1

此時所留下的兩個位置必皆為數碼 2，但中間共有六個數碼，故不合；

(b) 若為

6		5		7	4		6	5		4	1	7	1

則無法填入兩個數碼 3 以滿足題意，故不合；

(ii) 若為

6			5	7			6		5		1	7	1

則兩個數碼 4 的位置只有二種填法：

(a) 若為：

6	4		5	7		4	6		5		1	7	1

此時無法填入兩個數碼 3 以滿足題意，故不合。

(b) 若為：

6			5	7	4		6		5	4	1	7	1

此時無法填入兩個數碼 2 以滿足題意，故不合。

綜上所述，可知只有一種填法：

6	2	7	4	2	3	5	6	4	3	7	1	5	1