2014 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第 一 試：應 用 題（考試時間 90 分鐘）

◎ **請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分**

1. 有位商人進了兩支新的手機販售，最後每隻手機他都以 6000 元售出，他算了一下總帳，其中一隻賺了 20%、另一隻賠了 20%。請問這位商人販售這兩隻手機總共賺或是賠了多少錢？

【解】

可知　賺錢的手機進貨價為 $6000 \div 120\% = 5000$ 元、

　　　賠錢的手機進貨價為 $6000 \div 80\% = 7500$ 元，

兩隻手機的進貨價合計為 12500 元，共賣了 12000 元，故這商人賠了 500 元。

答：賠 500 元

2. 將一枚紅棋、一枚黑棋放在 8×8 棋盤的小方格內，使得這二枚棋子不在同一行也不在同一列。請問共有多少種不同的放法？(註：紅棋、黑棋對換視為不同的放法)

【解】

不妨先將黑棋放置在棋盤的任意一個小方格內，可知黑棋共有 $8 \times 8 = 64$ 個可放置的位置。此時因黑棋與紅棋不能在同一行上，故知黑棋所在位置的行與列都不能放置紅棋，其餘的(8－1) (8－1)=49 個位置均可放置紅棋，故可得知總共有 $64 \times 49 = 3136$ 種不同的放法。

答：3136 種

3. 汽車以每小時 30 km 的勻速上山、以每小時 50 km 的勻速下山，汽車到山頂後立即以原路下山，共費時 4 小時。請問汽車上山共行駛多少 km？

【解】

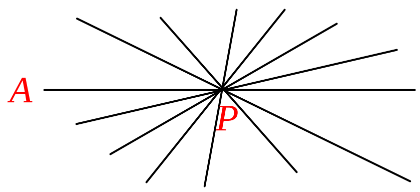
因汽車上山、下山的速度比為 30：50=3：5，故知相同距離內，上山、下山所花費的時間比為 5：3，即上山共花費 $4 \times \frac{5}{5+3} = 2.5$ 小時、下山共花費 $4 \times \frac{3}{5+3} = 1.5$ 小時，所以汽車上山共行駛 $30 \times 2.5 = 75\,\text{km}$。

答：75 km

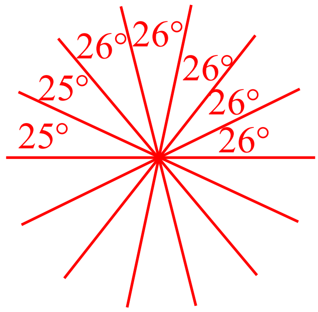
4. 在平面上給定了 7 條直線，其中任何兩條都不平行。若它們之間的夾角都是正整數度，請問它們之間最小可能的夾角之最大值是多少度？

【解】

平移這些直線，使得這 7 條線交於一點 P，如圖所示。



此時，相鄰的兩條直線之間的夾角都是正整數度，它們必不可以全都大於或等於26°，否則在直線AB上方的七個銳角之總和為$180^\circ=\angle APB\geq 26^\circ\times 7=182^\circ$，矛盾，故知它們之間最小可能的夾角之最大值為$25^\circ$。我們可令這七條線所夾的銳角為$26^\circ$、$26^\circ$、$26^\circ$、$26^\circ$、$26^\circ$、$25^\circ$、$25^\circ$，如圖所示：



答：25°

5. 老師問小杰：「你現在幾歲？」小杰回答說：「我出生時，我的姊姊的年齡是我媽媽年齡的四分之一，而我姊姊現在的年齡是我爸爸的三分之一。」老師說：「我是問你的年齡，不是問你姊姊的年齡！」小杰又說：「喔，我現在的年齡是我媽媽現在年齡的四分之一，再過九年我的年齡就是當時我爸爸年齡的三分之一。」請問小杰的姊姊現年幾歲？

【解 1】

因 3 與 4 的最小公倍數為 12，故先假設小杰現在的年齡是 12 歲。則可知媽媽現在是 48 歲，所以小杰出生時，媽媽的年齡是 36 歲，因此姊姊當時的年齡是 9 歲，即姊姊現在的年齡是 21 歲，故爸爸現在的年齡是 63 歲，此時在此假設之下，可知爸爸現在的年齡與小杰現在年齡的 3 倍相差 $63-3\times 12=27$，且此差每過一年會減少 2，因此需再過 $27\div 2=13.5$ 年小杰的年齡才會是當時爸爸年齡的$\frac{1}{3}$。但現由題意知只需再過 9 年小杰的年齡就是當時爸爸年齡的$\frac{1}{3}$，故知小杰的姊姊現年$21\times\frac{9}{13.5}=14$歲。

【解 2】

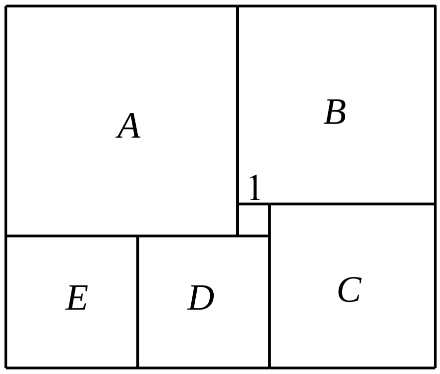
若小杰現在的年齡是 x，則知小杰媽媽現在的年齡是 $4x$，小杰爸爸再過九年的年齡是$3(x+9)$，因此小杰爸爸現在的年齡是$3(x+9)-9=3x+18$、小杰姊姊現在的年齡是$\frac{3x+18}{3}=x+6$；

而小杰出生時，小杰媽媽的年齡是$4x-x=3x$，小杰姊姊的年齡是$\frac{3x}{4}$，因此小杰姊姊現在的年齡是$\frac{3x}{4}+x=\frac{7x}{4}$。

故可得知$x+6=\frac{7x}{4}$，化簡可得$6=\frac{3}{4}x$，因此$x=8$，即小杰現在是 8 歲、小杰媽媽現在是 32 歲、小杰爸爸現在是 42 歲、小杰姊姊現在是 14 歲。

答：14 歲

6. 已知一個矩形依如圖所示之方式被切割為 6 個正方形，其中五個已標示上 A、B、C、D、E。若中央未標示英文的正方形之邊長為 1 cm，請問這整個矩形的面積為多少 cm^2？



【解 1】

觀察可知，正方形 D、C、B、A 的邊長是依序增加 1 cm，故正方形 A 與 D 的邊長差為 3 cm。接著也可觀察出正方形 D 與正方形 E 的邊長相同，且其邊長之和恰比正方形 A 的邊長多 1 cm。若正方形 D 的邊長為 2 cm，則正方形 A 的邊長為 $2+2-1=3$ cm，其差為 $3-2=1$ cm。但因實際上此差為 3 cm，故可推得正方形 D 實際上的邊長為 $2+(3-1)=4$ cm，接著便可知正方形 C、B、A 的邊長依序為 5 cm、6 cm、7 cm。因此這個矩形的面積為$(7+6)(6+5)=143$ cm^2。

【解 2】

令正方形 A 的邊長為 x cm，則知正方形 B 的邊長為 $x-1$cm、正方形 C 的邊長為 $x-2$cm、正方形 D 與 E 的邊長都為 $x-3$cm，此時觀察正方形 D 與 E 所組成的矩形兩條長邊，可得 $x+1=2(x-3)$，化簡即可得知 $x=7$。又可得知正方形 B 的邊長為 6 cm、正方形 C 的邊長為 5 cm。故這個矩形的面積為$(7+6)(6+5)=143$ cm^2。

答：143 cm^2

7. A、B、C 三位兄弟身上分別有 99、63、54 元，他們三人玩「均富」遊戲，每一次操作是選出其中二個人，身上錢較多的人必須將身上錢較少的人的錢加倍。經過三次操作後，請問這三兄弟身上最多錢與最少錢之差的最小可能值是多少元？

【解 1】

可知三人的錢總數恆為 $99+63+54=216$ ，即平均一人有 72 元。故若三次操作後三人的錢數各恰為 72 元時，則知第二次操作後，可令 A 身上的錢為 $72\div 2=36$ 元、C 身上的錢為 72+36=108 元、B 身上的錢為 72 元。而在第一次操作後，即第二次操作前，若 A 仍為 36 元，則知 C 身上的錢為 $108\div 2=54$ 元、B 身上的錢為 $72+54=126$ 元，此時可知在第一次操作前 B 身上的錢可為 63 元而 A 身上的錢可為 36+63=99 元，此即為題意所述之情形，因此知這三兄弟身上最多錢與最少錢之差的最小可能值是 0 元。

【解 2】

可知三人的錢總數為 $99+63+54=216=3\times 72$，即若能在三次操作內使三人的錢數各恰為 72 元，則知身上最多錢與最少錢之差的最小可能值是 0 元。可如以下操作方式達成：

第一次：　A 將 B 身上的錢加倍。經這次操作之後 A 身上的有 99－63=36 元、B 身上的錢有 63×2=126 元、C 身上的錢有 54 元；

第二次：　B 將 C 身上的錢加倍。經這次操作之後 A 身上的錢有 36 元、B 身上的錢有 126－54=72 元、C 身上的錢有 54×2=108 元；

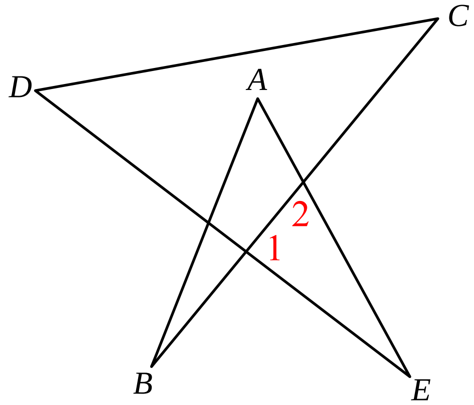
第三次：　C 將 A 身上的錢加倍。經這次操作之後 A 身上的錢有 36×2=72 元、

B 身上的錢有 72 元、C 身上的錢有 108－36=72 元。

註：因每次是選出其中二個人操作，故要使三人皆為 72 元前，須先使其中一人為 72 元；而由三人的錢數及其兩兩之間的差可知無法一次就使其中一人的錢數為 72 元，即至少需兩次才能此其中一人的錢數為 72 元，因此至少需三次才能使三人皆為 72 元。

答：0 元

8. 如圖所示，請求出 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$ 之度數。



【解】

利用三角形的外角等於兩個遠內角之和可得知 $\angle C+\angle D=\angle 1$、$\angle A+\angle B=\angle 2$，故 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=\angle 2+\angle 1+\angle E=180°$

答：180°

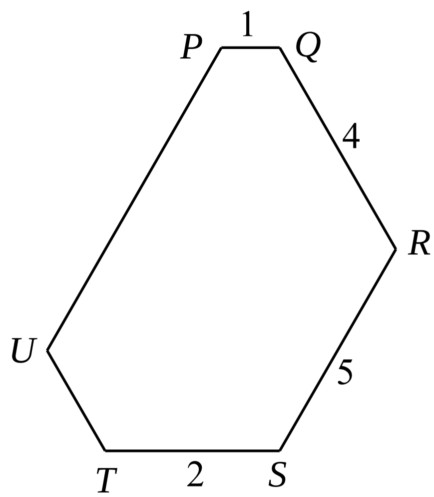
9. 請問 $\underbrace{7\times7\times7\times.....\times7}_{2014個7}$ 之乘積的末二位數是什麼？

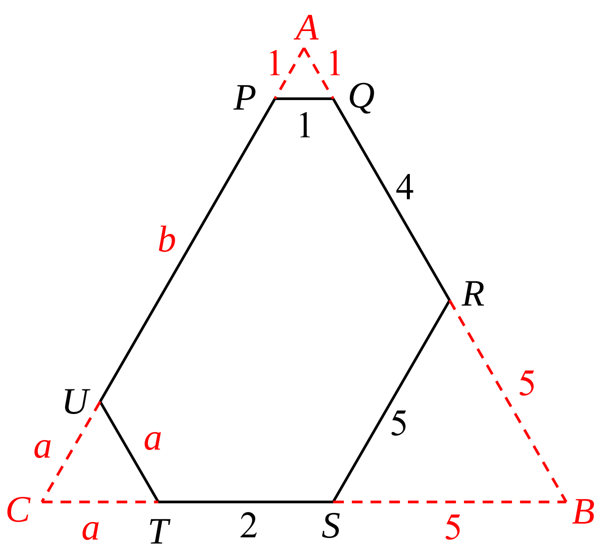
【解】

因 $7^1=7=07$、$7^2=49$、$7^3=343$、$7^4=2401$，故知 7 的次方之末二位數必是以 07、49、43、01 這四個數為週期依序循環出現。因 2014=4×503+2，故 7^{2014} 的末二位數是 49。

答：49

10. 六邊形 $PQRSTU$ 的六個內角都是 $120°$。若 $PQ=1$ cm、$QR=4$ cm、$RS=5$ cm 且 $ST=2$ cm，如圖所示。請問六邊形 $PQRSTU$ 的周長是多少 cm？





【解 1】

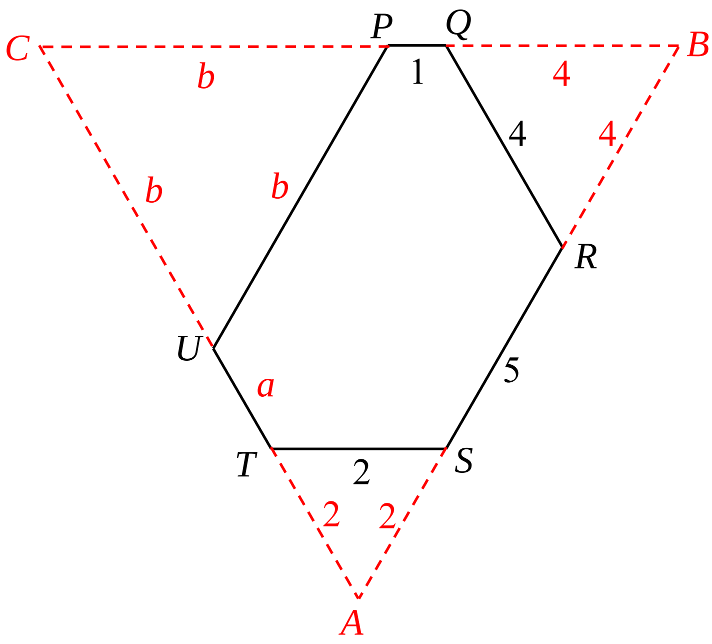
若令 $UT = a$ cm 與 $PU = b$ cm，接著延長 PU、QR 與 ST，如圖所示，令 PU 與 QR 的延長線相交於點 A、QR 與 ST 的延長線相交於點 B 而 ST 與 PU 的延長線相交於點 C。

因為六邊形 $PQRSTU$ 的六個內角都是$120°$，故可得知$\triangle ABC$、$\triangle APQ$、$\triangle RBS$ 與$\triangle UTC$ 都是正三角形，所以知 $RB = BS = RS = 5$ cm、$AQ = AP = PQ = 1$ cm、$UC = CT = UT = a$ cm 且 $AC = BC = AB$。

由 $AC = BC = AB = 1 + 4 + 5 = 10$ 可以得知 $1 + a + b = a + 2 + 5 = 10$，故 $a = 3$、$b = 6$，即六邊形 $PQRSTU$ 的周長是 $3 + 6 + 1 + 4 + 5 + 2 = 21$ cm.

【解 2】

若令 $UT = a$ cm 與 $PU = b$ cm，接著延長 PQ、RS 與 UT，如圖所示，令 UT 與 RS 的延長線相交於點 A、PQ 與 RS 的延長線相交於點 B 而 PQ 與 UT 的延長線相交於點 C。



因為六邊形 $PQRSTU$ 的六個內角都是$120°$，故可得知$\triangle ABC$、$\triangle ATS$、$\triangle RBQ$ 與$\triangle UPC$ 都是正三角形，所以知 $AS = ST = TA = 2$ cm、$RB = BQ = QR = 4$ cm、$UC = CP = PU = b$ cm 且 $AC = BC = AB$。

由 $AC = BC = AB = 2 + 5 + 4 = 11$ 可以得知 $2 + a + b = 4 + 1 + b = 11$，故 $b=6$、$a=3$，即六邊形 $PQRSTU$ 的周長是 $3 + 6 + 1 + 4 + 5 + 2 = 21$ cm.

答：21 cm

11. 某個正整數的個位數是 2，若將 2 移至第一位數則所得之值為原數之 2 倍。請問原數最小可能值是多少？

【解 1】

如下圖，因經過這樣調整後會變為 2 倍，故在長除法中，新數為被除數、除數為 2，則商為原數。因新數的首位數為 2，故被除數的首位數取 2，也因此知商的首位數為 1。因商即為原數，故知 1 即為被除數的第二位數；再繼續計算長除法下去，直到商出現 2 為止。可知第一次出現 2 時為 1052，但因 2 的前一位數 5 為奇數，而新數恆為偶數，故需再繼續計算下去，如下圖所示。故可得最小的可能值是 105263157894736842。

```
     1 0 5 2 6 3
  2)2 1 0 5 2 6
    2
    ─────
      1
      0
      ─────
      1 0
      1 0
      ─────
          5
          4
          ─────
          1 2
          1 2
          ─────
              6
              6
              ─
```

```
     1 5 7 8 9 4
  2)3 1 5 7 8 9
    2
    ─────
    1 1
    1 0
    ─────
      1 5
      1 4
      ─────
        1 7
        1 6
        ─────
          1 8
          1 8
          ─────
              9
              8
              ─
```

```
       7 3 6 8 4 2
  2)1 4 7 3 6 8 4
    1 4
    ─────
        7
        6
        ─────
        1 3
        1 2
        ─────
          1 6
          1 6
          ─────
              8
              8
              ─────
                4
                4
                ─
```

【解 2】

令這二位數為$10a+2$，其中 a 為 n 位的正整數，則由題意可知

$$2(10a+2)=2\times 10^n+a$$

$$20a+4=2\times 10^n+a$$

$$19a=2\times 10^n-4$$

$$=\underbrace{199\cdots9}_{n-1個9}6$$

$$a=\frac{\underbrace{199\cdots9}_{n-1個9}6}{19}=10^{n-1}+\frac{\underbrace{99\cdots9}_{n-2個9}6}{19}$$

因 a 為 n 位的正整數，故$\underbrace{99\cdots9}_{n-2個9}6$為 19 的倍數。因要求出最小的可能值，所以需求出 n 的最小值。將 $n=1$、2、3、…逐一代入計算，可知 n 的最小值為 17，即 $a=10^{16}+\dfrac{\underbrace{99\cdots9}_{15個9}6}{19}=10526315789473684$，原數最小可能值為 105263157894736842。

【解 3】

令這二位數為$10a+2$，則此數的 2 倍為$20a+4$，即將 2 移至第一位數則所得之值的個位數為 4，因此可推知原數的末二位數為 42；

故可令這二位數為$10^2\times b+42$，則此數的 2 倍為$10^2\times 2b+84$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末二位數為 84，因此可推知原數的末三位數為 842；

故可令這二位數為$10^3\times c+842$，則此數的 2 倍為$10^3\times 2c+1684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末三位數為 684，因此可推知原數的末四位數為 6842；

故可令這二位數為$10^4\times d+6842$，則此數的 2 倍為$10^4\times 2d+13684$，即將 2 移至

第一位數則所得之值的末四位數為 3684，因此可推知原數的末五位數為 36842；

故可令這二位數為$10^5 \times e + 36842$，則此數的 2 倍為$10^5 \times 2e + 73684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末五位數為 73684，因此可推知原數的末六位數為 736842；

故可令這二位數為$10^6 \times f + 736842$，則此數的 2 倍為$10^6 \times 2f + 1473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末六位數為 473684，因此可推知原數的末七位數為 4736842；

故可令這二位數為$10^7 \times g + 4736842$，則此數的 2 倍為$10^7 \times 2g + 9473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末七位數為 9473684，因此可推知原數的末八位數為 94736842；

故可令這二位數為$10^9 \times h + 94736842$，則此數的 2 倍為$10^9 \times 2h + 189473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末八位數為 89473684，因此可推知原數的末九位數為 894736842；

故可令這二位數為$10^{10} \times i + 894736842$，則此數的 2 倍為$10^{10} \times 2i + 1789473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末九位數為 789473684，因此可推知原數的末十位數為 7894736842；

故可令這二位數為$10^{11} \times j + 7894736842$，則此數的 2 倍為$10^{12} \times 2j + 15789473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末十位數為 5789473684，因此可推知原數的末十一位數為 57894736842；

故可令這二位數為$10^{12} \times k + 57894736842$，則此數的 2 倍為$10^{12} \times 2k + 115789473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末十一位數為 15789473684，因此可推知原數的末十二位數為 157894736842；

故可令這二位數為$10^{13} \times l + 157894736842$，則此數的 2 倍為$10^{13} \times 2l + 315789473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末十二位數為 315789473684，因此可推知原數的末十三位數為 3157894736842；

故可令這二位數為$10^{14} \times m + 3157894736842$，則此數的 2 倍為$10^{14} \times 2m + 6315789473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末十三位數為 6315789473684，因此可推知原數的末十四位數為 63157894736842；

故可令這二位數為$10^{15} \times n + 63157894736842$，則此數的 2 倍為$10^{15} \times 2n + 126315789473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末十四位數為 26315789473684，因此可推知原數的末十五位數為 263157894736842；

故可令這二位數為$10^{16} \times o + 263157894736842$，則此數的 2 倍為$10^{12} \times 2o + 526315789473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末十五位數為 526315789473684，因此可推知原數的末十六位數為 5263157894736842；

故可令這二位數為$10^{17} \times p + 5263157894736842$，則此數的 2 倍為$10^{17} \times 2p + 10526315789473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末十六位數為 0526315789473684，因此可推知原數的末十七位數為 05263157894736842；

故可令這二位數為$10^{18}\times q+5263157894736842$，則此數的 2 倍為 $10^{18}\times 2q+10526315789473684$，即將 2 移至第一位數則所得之值的末十七位數為 10526315789473684，因此可推知原數的末十八位數為 105263157894736842；若再令這二位數為$10^{19}\times r+105263157894736842$，則此數的 2 倍為 $10^{19}\times 2r+210526315789473684$，此時發現 210526315789473684 恰為 105263157894736842 將 2 移至第一位數則所得之值，故可得知此二位數的最小可能值為 105263157894736842。

答：105263157894736842

12. 已知有一些正整數，它被 150 除的餘數是 64，被 151 除的餘數是 51。請問滿足上述條件的最小正整數是什麼？

【解 1】

觀察可知，當 151 被 150 除時，所得的餘數為 1；而 $150\times 150=(151-1)(151-1)=151^2-2\times 151+1$，因此知 22500 被 151 除時，所得的餘數為 1。現考慮一個數 $22500\times 51+151\times 64=1157164$。當此數被 150 除時，由第二項可判斷出餘數為 64；當此數被 151 除時，由第一項可判斷出餘數為 51。因此我們可減去 $150\times 151=22650$ 的任意倍數而使滿足題意所述之餘數仍不改變。因 $1157164=22650\times 51+2014$，故知最小值為 2014。

【解 2】

不妨令這一個數為$151a+51$，其中$a>0$。而$151a+51=150a+(a+51)$，故由此數被 150 除的餘數是 64 可判斷知存在一個整數 b 使得$a+51=64+150b$，此即$a=13+150b$，故可判斷出最小值發生在$b=0$、$a=13$，所以知這些數中的最小值是$151\times 13+51=2014=150\times 13+64$。

答：2014

2014 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

1. 有一個二位數，不論將其乘以哪一個一位正整數，所得乘積的各位數碼之和都相等。請找出所有滿足上述條件的二位數。

【解 1】

當一個一位數乘以 5 時，所得值的個位數為 0 或 5，並且最多進位 4 至前一位數。所以對於 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，在乘以 5 之後所得之數碼和的變化依序為 0、4、−1、3、−2、2、−3、1、−4、0，因此可以判斷出−4 與 4 必同時出現，−1 與 1 必同時出現，−2 與 2 必同時出現，−3 與 3 必同時出現，兩個 0 必同時出現，才能使數碼和不改變，即 1 與 8、2 與 7、3 與 6、4 與 5、0 與 9 必同時出現，可推知 18、81、27、72、36、63、54、45、90 與 99 皆滿足條件。接著驗算乘以其它一位正整數，如下表所示，可知僅 18、45、90 與 99 滿足。

×	9	8	7	6	5	4	3	2
18	162	144	126	108	90	72	54	36
27 36	243 324	216 288	189					
45	405	360	315	270	225	180	135	90
54 63 72 81	486 567 648 729							
90 99	810 891	720 792	630 693	540 594	450 495	360 396	270 297	180 198

【解 2】

令此二位數為 $\overline{ab}$，其數碼和為 $a+b$。現觀察 $2\overline{ab}$ 的數碼和：

(i) 若 $1\le a\le 4$ 且 $0\le b\le 4$，則 $2\overline{ab}$ 的數碼和為 $2a+2b$，即 $2a+2b=a+b$，此即 $a+b=0$，矛盾，故不合；

(ii) 若 $1\le a\le 4$ 且 $5\le b\le 9$，則 $2\overline{ab}$ 的數碼和為 $(2a+1)+(2b-10)$，即 $2a+2b-9=a+b$，此即 $a+b=9$；

(iii) 若 $5\le a\le 9$ 且 $0\le b\le 4$，則 $2\overline{ab}$ 的數碼和為 $1+(2a-10)+2b$，即 $2a+2b-9=a+b$，此即 $a+b=9$；

(iv) 若 $5\le a\le 9$ 且 $5\le b\le 9$，則 $2\overline{ab}$ 的數碼和為 $1+(2a+1-10)+(2b-10)$，即 $2a+2b-18=a+b$，此即 $a+b=18$。

可發現符合題意的二位數之數碼和必為 9 或 18，皆一定為 9 的倍數，故知可能的數為 18、27、36、45、54、63、72、81、90 與 99。接著分別驗算以上十個數的 3、4、5、6、7、8、9 倍之數碼和，可發現 $27\times7=189$、$36\times8=288$、$54\times7=378$、$63\times3=189$、$72\times4=288$、$81\times6=486$，其數碼和皆改變為 18，故不合。因此共有 4 個這樣的二位數：18、45、90、99。

答：18、45、90、99(給出正確理由與答案每一解給五分，全對 25 分)

2. 請將 2 枚壹元、4 枚五元及 3 枚拾元硬幣放進一個 3×3 方格表的小方格內，每個小方格內恰放入一枚硬幣，使得每行及每列硬幣的總金額均不相同。
(註：只寫出一組答案即可，請在答案處的表格中填入數)

【解 1】

若 3 枚拾元硬幣都在不同列中，則知每一列的和只可能為 20、16 或 12；再因三列的和都不相同，故知這三列的和必分別恰為這三個數。但因只有 2 枚壹元硬幣，故知 16、20 不可能同時出現在不同列之和中，因此知 3 枚拾元硬幣不會都在不同列中，同樣也不會都在不同行中。現由對稱性可假設 3 枚拾元硬幣的位置如下圖，再由每行及每列硬幣的總金額均不相同及對稱性可令其中一枚壹元硬幣與一枚五元硬幣的位置在下圖中的位置：

10	10	5
10		
1		

可知在左上至右下的對角線上的兩個方格需都放入五元硬幣，否則會造成第二列的和與第二行的和相等：

10	10	5
10	5	
1		5

接著若另 1 枚壹元硬幣放在第二列的空格中，則會造成第三列與第三行的和都是 11，不合，故可得以下唯一的排列方式：

10	10	5
10	5	5
1	1	5

【解 2】

這 9 個硬幣總額為 $2\times1+4\times5+3\times10=52$ 元。觀察 52 寫成三個正整數和的情形。因五元硬幣、拾元硬幣共 7 個，故利用抽屜原理可知，至少有一行三個全為五元或拾元硬幣、至少有一列三個全為五元或拾元硬幣，即至少有一行的總額 m 為 5 的倍數且 $5\times3=15\le m\le10\times3=30$、至少有一列的總額 n 為 5 的倍數且 $5\times3=15\le n\le10\times3=30$，其中 $m\ne n$。

因壹元硬幣共 2 個，故知每行及每列的總額至少為 7 且被 5 除之後所得的餘數為 0、1 或 2。

利用以上分析所得資訊來觀察 52 寫成三個正整數和的可能情形，發現僅有以下情形可滿足：

$$52=15+30+7=15+25+12=15+20+17=15+10+27$$
$$=15+26+11=15+21+16$$
$$=20+25+7=20+10+22$$
$$=20+21+11$$
$$=25+10+17$$
$$=30+10+12$$

可知以上可能的情形中，10、17、22、26、27 皆不能只利用 3 個現有硬幣得到，故可刪除$15+10+27$、$20+10+22$、$25+10+17$、$30+10+12$、$15+20+17$、$15+26+11$，因此可能的情形為：

$$52=15+30+7=15+25+12=15+21+16$$
$$=20+25+7=20+21+11$$

(1) 若各行之和分別為 15、30 及 7 時，則各列之和只能分別為 20、21 及 11。不失一般性，由各行之和知此表可寫成

5	10	5	**20**
5	10	1	**16**
5	10	1	**16**
15	**30**	**7**	

可發現各列之和只可能分別為 20、16、16，故不合；

(2) 若各行之和分別為 15、25 及 12 時，則各列之和只能分別為 20、21 及 11。不失一般性，由各行之和知此表可寫成

5	10	10	**25**
5	10	1	**16**
5	5	1	**11**
15	**25**	**12**	

或

5	10	1	**16**
5	10	1	**16**
5	5	10	**20**
15	**25**	**12**	

可發現各列之和只可能分別為 25、16、11 或 16、16、20，故不合；

(3) 若各行之和分別為 15、21 及 16 時，則各列之和只能分別為 20、25 及 7。不失一般性，由各行之和知此表可寫成

5	10	5	**20**
5	10	10	**25**
5	1	1	**7**
15	**21**	**16**	

或

5	10	5	**20**
5	1	10	**16**
5	10	1	**16**
15	**21**	**16**	

或

5	1	5	**11**
5	10	10	**25**
5	10	1	**16**
15	**21**	**16**	

其中僅上左表可為一解而另兩表不合題意。

故知可如下表方式排列：(旋轉、翻轉、任兩行或任兩列交換之答案視為相同，全對才給分，出現任一錯誤 0 分。)

5	10	5	**20**
5	10	10	**25**
5	1	1	**7**
15	**21**	**16**	

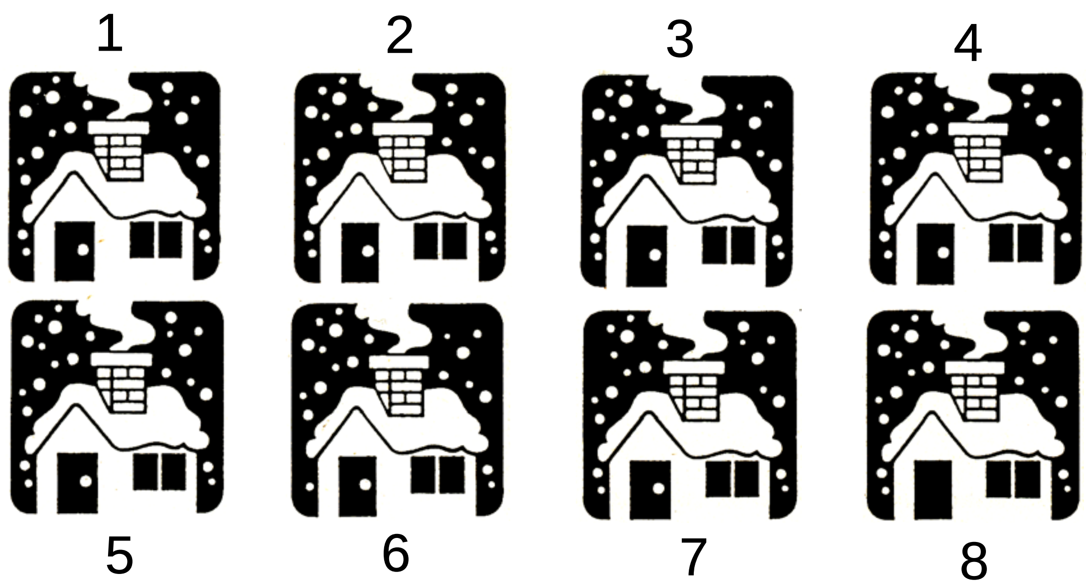
3. 小英與小明做數學遊戲。小英選出一個十位數 7804320512，每次小明都可以任意挑選出五個數 a、b、c、d、e，然後詢問小英 $78a + 4b + 32c + 5d + 12e$ 的值是多少？小英每次都正確地回答小明所提出的問題。請問小明最少需要提問多少次才能保證準確猜出小英所選的數是 7804320512？

【解】

小明可選擇數組為 $e = 1$、$d = 100$、$c = 10000$、$b = 1000000$ 和 $a = 100000000$，便可由小英回答的數為 7804320512 來判斷出作為謎底的數是 7804320512。

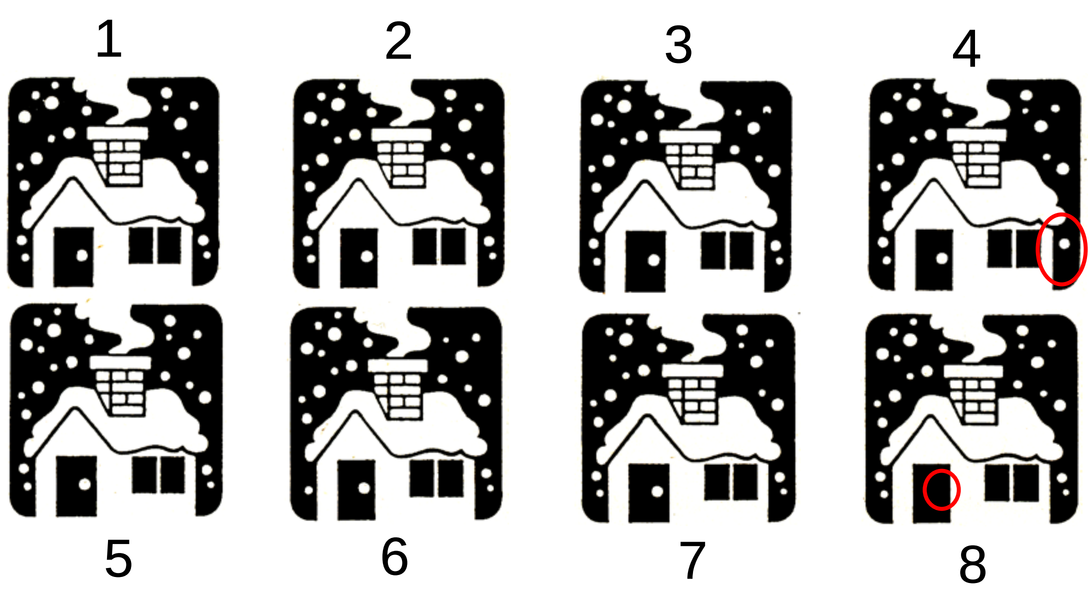
答：1 次(給出正確理由，二次給 15 分、三或四次給 10 分、五或六次給 5 分)

4. 在以下八個圖形中，請問哪兩個圖形是完全相同的？

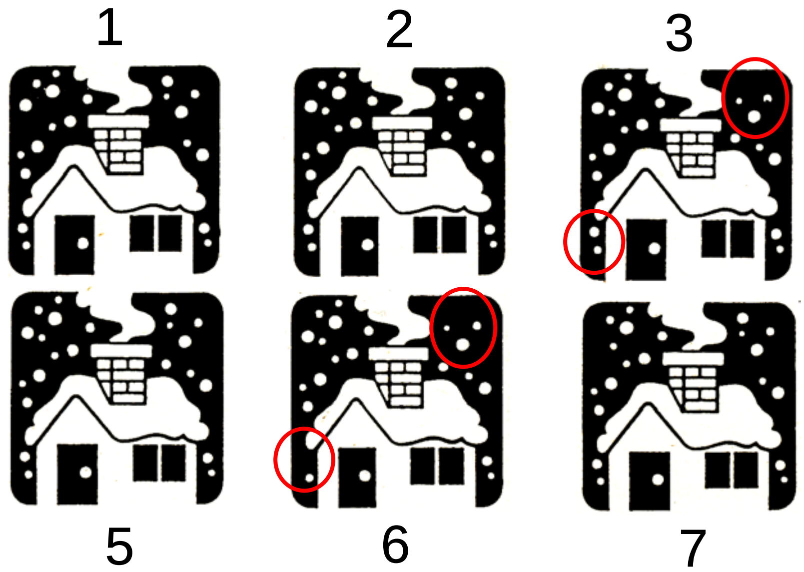


【解】

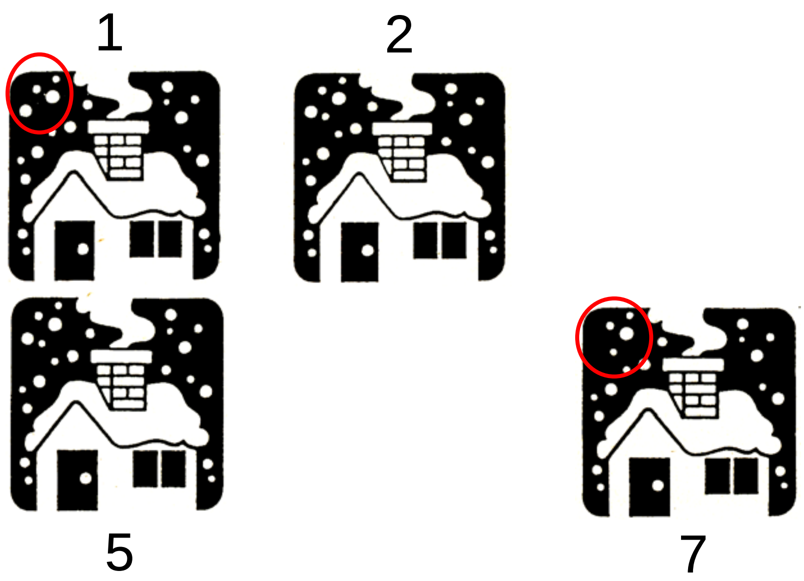
可知 8 號圖內的門沒有門把、4 號圖內的右下角只有一個白點，與其他七個圖不同，故可直接排除：



這六個圖中，僅 3 號圖與 6 號圖的右上角只有 3 個白點，但 3 號圖與 6 號圖的左下角分別有 2 個白點與 1 個白點，即這兩個圖並不全等，故可排除這兩個圖：



這四個圖中，僅 1 號圖與 7 號圖的左上角只有 4 個白點，但 1 號圖的這四個白點為 2 大 2 小、7 號圖的這四個白點為 1 大 3 小，且其排列方式也不相同，即這兩個圖並不全等，故可排除這兩個圖：



因此 2 號圖與 5 號圖為全等的兩個圖。

答：2 號圖與 5 號圖