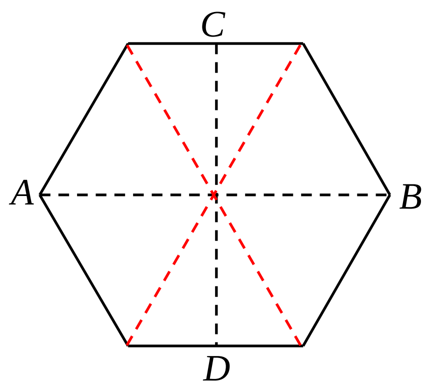
2015 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第　一　試　應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

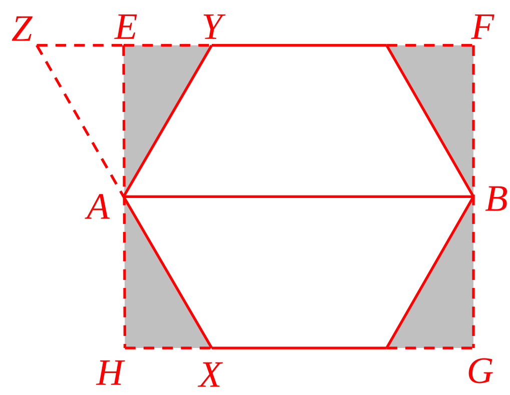
1. 下圖中的正六邊形的面積為 126 cm^2，其中點 A、B 為相對的點、點 C 與 D 分別為所在邊的中點且 CD 與 AB 垂直。請問以 AB 為長、CD 為寬的矩形的面積為多少 cm^2？



【解 1】

如圖，補上另兩組對角的連線，可知正六邊形由六個底長度為 $\dfrac{AB}{2}$ 、高長度為 $\dfrac{CD}{2}$ 的正三角形組成，因此其面積為 $6\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{AB}{2}\times\dfrac{CD}{2}=\dfrac{3}{4}\times AB\times CD$，故知所求的矩形面積為 $126\div\dfrac{3}{4}=168$ cm^2。

【解 2】



可將 CD 分別平移至 EH、FG 使得點 A、點 B 分別為 EH、FG 的中點，再延長點 C、點 D 所在之邊，使得 $EFGH$ 為一個完整矩形。可知矩形 $EFGH$ 即為以 AB 為長、CD 為寬的矩形。再以點 A 為中心，旋轉三角形 AHX 使得 AH 與 AE 重合、點 Z 為點 X 旋轉後的位置，則利用三角形的角度與邊長可判斷出三角形 AYZ 面積為 $\dfrac{1}{6}$ 的正六邊形面積，因此三角形 AHX 與 AEY 的面積為 $\dfrac{1}{6}\times126=21\text{cm}^2$；同理，另二塊陰影部分也為 21 cm^2，因此矩形 $EFGH$ 的面積為 $126+21+21=168\text{cm}^2$。

答：168 cm^2

2. 已知有某些六位數 $\overline{17A32B}$ 是 88 的倍數。請問這樣的數除以 88 所得的商之最大值是什麼？

【解】

因 $\overline{17A32B}$ 是 88 的倍數，故這個數同時是 8 與 11 的倍數。由 $\overline{17A32B}$ 是 8 的倍數可得知 $\overline{32B}$ 是 8 的倍數，即 $B=0$ 或 8；再由 $\overline{17A32B}$ 是 11 的倍數可以得知 $(7+3+B)-(1+A+2)=7+B-A$ 是 11 的倍數，而因 A 是一個數碼，故若 $B=0$，則可推得 $A=7$，而若 $B=8$，則可推得 $A=4$。所以原六位數的可能值為 174328 或 177320，故所求為 $177320\div88=2015$。

答：2015

3. 有五枚不同的金幣，已知每枚金幣都有三種可能的重量。請問共有多少種可能的情況使得這五枚金幣恰有二種重量？

【解】

五枚金幣重量都相同不符合我們的要求。若是有四枚金幣重量相同另一枚重量不同，則選出這四枚重量相同的金幣共有 5 種選法其重量有 3 種可能，而另一枚金幣的重量有 2 種可能，故知此時共有$5\times3\times2=30$種不同的情況；若是有三枚金幣重量相同，另兩枚重量相同但與這三枚重量不同的金幣，則選出這三枚金幣共有$\frac{5\times4}{2}=10$種選法其重量有 3 種可能，而另二枚金幣的重量有 2 種可能，故知此時共有$10\times3\times2=60$種不同的情況。因此可得知共有$30+60=90$種情況。

答： 90 種

4. 客船以勻速從 A 城到 B 城順流而下在無風時需航行 6 小時，而以相同速度由 B 城到 A 城逆流而上在無風時需航行 7 小時。那麼由 A 城放一無動力木筏順流而下，在無風且途中無任何阻攔時，請問需經幾小時才會抵達 B 城？

【解 1】

順流而下時客船每小時航行單程距離的$\frac{1}{6}$，逆流而上則為$\frac{1}{7}$，兩者之速度差為水流速度的二倍，故每小時水流航行單程距離的$(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})\div2=\frac{1}{84}$，因此由 A 城放一木筏順流而下到 B 城，途中需 84 小時。

【解 2】

若令輪船速度為 a、水速為 b，則由順流需 6 小時、逆流需 7 小時知

$$a+b:a-b=7:6\Rightarrow 7a-7b=6a+6b\Rightarrow a=13b$$

因此 A 城到 B 城的距離為$6(b+13b)=7(13b-b)=84b$，即由 A 城放一無人木筏順流而下到 B 城，途中需經 84 小時。

答：84 小時

5. 有一塊形狀為直角三角形的花園，花園每一邊的長度都是整數 m，且其中一條直角邊的長度為 35 m。請問這一個花園的周長至少為多少 m？

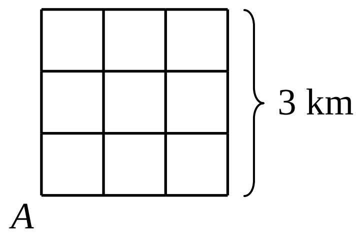
【解】

由勾股定理可知，35^2 為斜邊與另外一條直角邊的長度平方差，此即為斜邊與另外一條直角邊的長度之和與差的乘積，且知斜邊與另外一條直角邊的長度之和的最小值發生在斜邊與另外一條直角邊的長度之差的最大值時。

因 49×25 是 35^2 寫成兩個正因數相乘時，這兩個正因數最接近且不相等的分解法，故斜邊與另外一條直角邊的長度之和的最小值為 49 m，所以此直角三角形之斜邊為$(49+25)\div2=37$，可得此直角三角形之三邊長為$(12, 35, 37)$，即這一個花園的周長至少為$35+49=84$m。

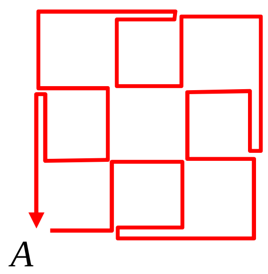
答：84 m

6. 某城市的街道圖是個3×3的方格表，一位清道夫從角落 A 點出發，沿著道路清掃街道，他必須走過每段街道至少一次，並最後回到 A 點。請問他行走的最短距離是多少 km？



【解】

可知在城市的四條邊上且除了角落之外共有八個路口，這八個路口為三條街的交會點，而清道夫清掃時必經過其中一條街。因此要使清道夫移動的距離最少，他必須經過連接這八個路口中在同一條邊上兩個路口的這四條街道各二次。因為城鎮共有 24 條街道，故他行走的最短距離為$24+4=28$ km。下圖是一條長度為 28 km 的路徑。



答：28 km

7. 定義正整數 n 的階乘為：$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1$，例如$5!=5\times4\times3\times2\times1$。若有一個三位數的數碼都不為 0，且這一個三位數恰等於它的三個數碼的階乘之和，請問這個三位數是什麼？

【解】

設$\overline{abc}$為滿足題意的一個數，即$\overline{abc}=a!+b!+c!$。

因計算後可知$6!=720<1000<7!=5040$，故 a、b、c 三數至多為 6 的數；再因$6!=720$，其百位數碼為 7，故若 a、b、c 中有一數為 6，則$\overline{abc}\ge720$，即 a、b、c 中至少有一數為 7、8 或 9，矛盾，因此 a、b、c 三數至多為 5；而若 a、b、c 三數至多為 4，則$\overline{abc}=a!+b!+c!\le24+24+24=72<100$，矛盾，因此 a、b、c 三數中至少一數為 5。

(i) 若三數皆為 5，則$\overline{abc}=555$，但此時$a!+b!+c!=5!+5!+5!=360$，矛盾；

(ii) 若二數為 5、另一數不為 5，則$5!+5!+1!=241\le a!+b!+c!\le5!+5!+4!=264$，故$\overline{abc}=255$，但$5!+5!+2!=244$，矛盾；

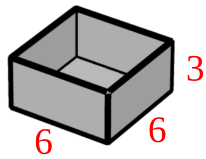
故知恰有一數為 5；由$5!+1!+1!=122\le a!+b!+c!\le5!+4!+4!=168$可得知$a=1$，接著再由$5!+1!+1!=122\le1+b!+c!\le5!+1!+4!=145$知$\overline{abc}=125$、135 或 145，經計算後可知$1!+2!+5!=123$、$1!+3!+5!=127$、$1!+4!+5!=145$，故僅$\overline{abc}=145$滿足題意。

答：145

8. 一個沒有頂蓋的長方體盒子的表面積為 108 cm^2。請問這個長方體盒子的最大體積是多少 cm^3？

【解 1】

如果有 2 個這樣的盒子，可以將其中一個翻過來，並把沒有頂蓋的部分重合而拼成一個六個面都有的長方體，此時其總表面積為 216 cm^2，可知這樣子的長方體體積最大會是在恰為正立方體的時候，即每一個面都是正方形，且其面積為



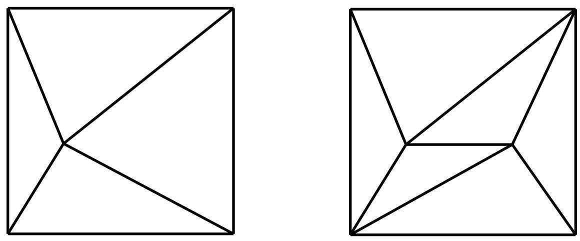
$\dfrac{216}{6}=36=6^2\,cm^2$，故其邊長為 6 cm，此時題意中的長方體為 $6\text{ cm}\times6\text{ cm}\times3\text{ cm}$，其體積為 108 cm^3。

【解 2】

可令長方體的長、寬、高分別為 a、b、c，則其表面積為 $ab+2bc+2ca=108\,cm^2$。此時由算幾不等式知 $(\dfrac{ab+2bc+2ca}{3})^3=(\dfrac{108}{3})^3\geq4(abc)^2$，化簡得 $(abc)^2\leq108^2$，此即可推知 $abc\leq108$，故這個長方體盒子的最大體積是 108 cm^3，且最大體積會發生在 $ab=2bc=2ca$ 時，即 $a:b:c=2:2:1$，再由此時體積是 108 cm^3 可推知 $a=b=6$ cm、$c=3$ cm。

答：108 cm^3

9. 在一個正方形內部有 15 個點，部分成對的點之間有線段連接，且部分的點與正方形的四個頂點有線段連接。已知所有的線段除了端點以外都沒有相交，且這個正方形被這些線段分成數個區域，每一個區域都恰由三條線段所圍成。請問這些區域中共有多少個三角形？下圖左為僅有 1 個點在正方形內部且滿足所有條件的情況，此時共有 4 個三角形；下圖右為有 2 個點在正方形內部且滿足所有條件的情況，此時共有 6 個三角形。



【解】

可知位在正方形四個頂點上三角形的角之總和為 $4\times90^\circ=360^\circ$，而分別位在 15 個點上三角形的角之總和都為 360°，故所有三角形的角之總和為 $16\times360^\circ$。因每一個三角形的內角和都是 180°，故知共有 $16\times360^\circ\div180^\circ=32$ 個三角形。

答：32 個

10. 某次象棋比賽有兩位七年級學生和一些八年級學生參加。任兩位參賽者都恰比賽一局，贏者得 2 分，輸者未得分，若為和局，則兩人各得 1 分。現知兩位七年級學生共得 16 分，而所有八年級學生所得的分數都彼此相同。請問至多有幾位八年級學生參加了這次象棋比賽？

【解 1】

假設共有 a 位八年級學生參加，即共有 $a+2$ 位學生參賽，故可推知總比賽場數為 $\frac{(a+2)(a+1)}{2}$。因每場比賽所參與的兩位同學合計共得 2 分，故所有學生的總得分為 $\frac{(a+2)(a+1)}{2}\times 2=(a+2)(a+1)$，所以每位八年級學生得 $\frac{(a+2)(a+1)-16}{a}=\frac{a^2+3a-14}{a}=a+3-\frac{14}{a}$ 分。由給分方式可得知，每一位學生的分數必是正整數，而 14 的因數有 1、2、7、14，故：

(i) $a=1$ 時，每位八年級學生得 $a+3-\frac{14}{a}=4-14<0$ 分，故不合；

(ii) $a=2$ 時，每位八年級學生得 $a+3-\frac{14}{a}=5-7<0$ 分，故不合；

(iii) $a=7$ 時，每位八年級學生得 $a+3-\frac{14}{a}=7+3-2=8$ 分，此滿足題意；

(iv) $a=14$ 時，每位八年級學生得 $a+3-\frac{14}{a}=14+3-1=16$ 分，此滿足題意。

可令這 14 位八年級學生都平手，且每人都勝一位七年級學生與另一位七年級學生平手，則所有八年級學生所得的分數都是 16 分，二位七年級學生共得 16 分。因此至多有 14 位八年級學生參加。

【解 2】

七年級學生共得 16 分，其中 2 分是他們二人之間比賽而得的，故有 14 分是與所有八年級學生比賽而得的。因所有八年級學生所得的分數都彼此相同且為整數，故其人數必須是 14 的因數，因此至多有 14 位八年級學生參加。可令這 14 位八年級學生都平手，且每人都勝一位七年級學生與另一位七年級學生平手，則所有八年級學生所得的分數都是 16 分，二位七年級學生共得 16 分。

答：14 位

11. 有一個數列，前兩項都是 59，從第三項開始，每一項都是前兩個數的和，即 59、59、118、177、295、472、…。請問第 2015 項的數被 3 除的餘數是什麼？

【解】

可知前兩個數之餘數為 2，而從第三個數開始，每個數被 3 除的餘數恰為前兩個數被 3 除的餘數之和再被 3 除的餘數，故可得知此數列為 2、2、1、0、1、1、2、0、2、2、1、0、1、1、2、0、…，即是一個以 2、2、1、0、1、1、2、0 這八個數循環重複出現的數列。因 $2015=8\times 251+7$，因此第 2015 個數被 3 除的餘數與第 7 個數被 3 除的餘數相同，即為 2。

答：2

12. 把一張很大的正方形的紙被沿直線切為兩部分。選擇其中之一再沿直線切為兩部分。再選擇三塊之一切為兩部分，依此方式一直操作下去，直到在所剪出的紙堆中有 5 個 15 邊形為止，請問至少要操作幾次？

【解 1】

可利用以下方式切 59 次得到 5 個 15 邊形：

可先將原正方形沿非對角線的直線逐步切 4 次成為五個四邊形，接著對每一個四邊形，每次都沿非對角線的直線切除一個角，切 11 次後就成為一個 15 邊形。因此共切 $4+11\times5=59$ 次而得到 5 個 15 邊形。

現驗證至少需切 59 次。可知未操作前的內角和為 360°，而每操作一次，切割線端點處至多各會使多邊形的角之總和增加 180°，總共至多增加 360°。若恰切出 5 個 15 邊形時，共切了 n 次，此時共有 $n+1$ 個多邊形，且其內角總和至多為 $(n+1)\times360^\circ$，其中這 5 個 15 邊形的內角總和為 $5\times(15-2)\times180^\circ$，而其餘的多邊形的內角總和至少為 $(n+1-5)\times180^\circ$，故可得 $5\times13+(n-4)\leq2n+2$，化簡後即有 $n\geq59$。

【解 2】

可利用以下方式切 59 次得到 5 個 15 邊形：

可先將原正方形沿非對角線的直線逐步切 4 次成為五個四邊形，接著對每一個四邊形，每次都沿非對角線的直線切除一個角，切 11 次後就成為一個 15 邊形。因此共切 $4+11\times5=59$ 次而得到 5 個 15 邊形。

現驗證至少需切 59 次。現觀察多邊形的邊總數，可知未操作前的多邊形為正方形，共有 4 條邊，而每操作一次，所切出的線會使總邊數增加 2，且每一個切割點原先所在的邊上至多會再各增加 1 條邊，總共至多增加 4 條邊。若恰切出 5 個 15 邊形時，共切了 n 次，此時共有 $n+1$ 個多邊形，且其總邊數至多為 $4n+4$，其中這 5 個 15 邊形的總邊數為 $5\times15=75$，而其餘的多邊形的總邊數至少為 $3(n+1-5)=3n-12$，故可得 $75+3n-12\leq4n+4$，化簡後即有 $n\geq59$。

答：59 次

2015 小學數學競賽選拔賽決賽試題解答

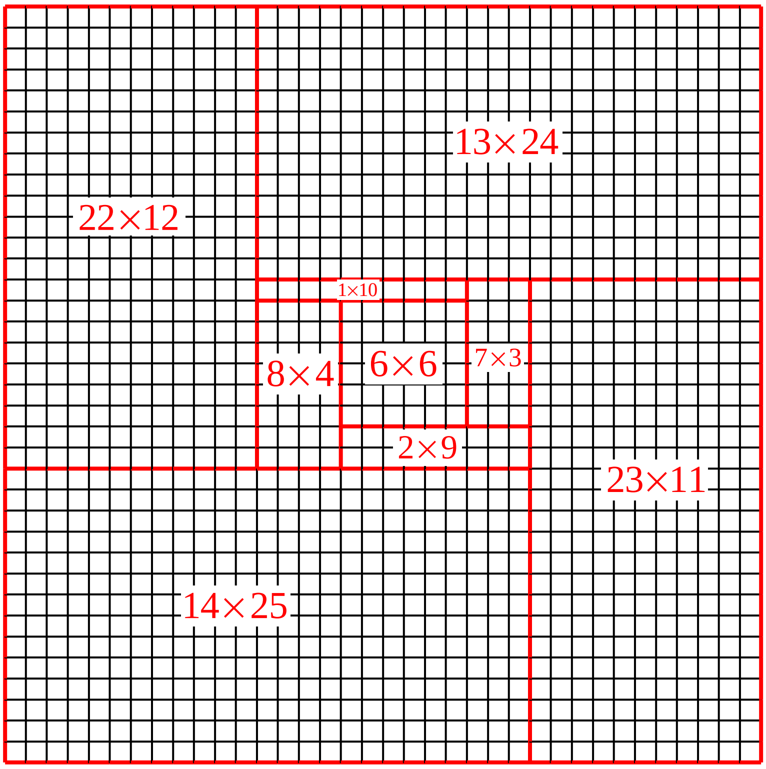
第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 2、4 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 請將下面的正方形分成 9 個矩形，使得每兩個相鄰的矩形在移除邊上共同的部分之後都不能成為矩形。(請標示每個矩形的邊長)

【解】

下圖為將一個36×36的正方形，分為22×12、13×24、1×10、7×3、23×11、8×4、6×6 、2×9 、14×25這九個矩形的情況。此時這九個矩形中任二個的維度都不相同，因此無論是否相鄰，任二個矩形都無法拼成一個矩形。



2. 有 31 枚金幣，可能全都是重量相同的真幣，也有可能恰有一枚假幣，但此枚假幣可能比真幣重，也可能比真幣輕。請問至少要用沒有刻度的兩臂天平秤幾次，才能確定有沒有假幣？若有假幣，還必須要判定此假幣比真幣輕或重。(註：並不要求找出此枚假幣)

【解】

可知若有假幣，秤重一次不可能判定此假幣比真幣輕或重。而利用以下方法最多秤重二次即可判別：

【方法 1】

第一次秤重時，在天平兩側各放置 15 枚金幣。

若平衡，則這 30 枚金幣都是真幣，第二次秤重時，從這 30 枚真幣中任選 1 枚放置在左盤、尚未被秤重的金幣都放在右盤，則平衡時沒有假幣、右盤重則假

幣比真幣重、右盤輕則假幣比真幣輕；
若不平衡：
不妨將重的一側上的 15 枚金幣與尚未被秤重的 1 枚金幣這 16 枚金幣分成各有 8 枚金幣的二堆並分別放置在天平兩側秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。
【方法 2】
第一次秤重時，在天平兩側各放置 14 枚金幣。
若平衡，則這 28 枚金幣都是真幣，第二次秤重時，從這 28 枚真幣中任選 3 枚放置在左盤、尚未被秤重的 3 枚金幣都放在右盤，則平衡時沒有假幣、右盤重則假幣比真幣重、右盤輕則假幣比真幣輕；
若不平衡：
可知第一次秤重時使用的 28 枚金幣中必有假幣。接著將較輕一側的金幣移除，並從較重的一側中保留 7 枚金幣在此側秤盤，另 7 枚金幣移至另一個秤盤來秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。

答：2 次

【註】: 在一般情況下，除了 2 枚金幣在有假幣的情況下無法辨別，其餘情況無論多少枚金幣，都是利用 2 次秤重即可辨別出是否有假幣且假幣比真幣重或輕。可從金幣數被 4 除之後所得的餘數來觀察：

(1) 若有 $4m$ 枚金幣
第一次可在天平兩側各放置 $2m$ 枚金幣。
若平衡：則這 $4m$ 枚金幣都是真幣；
若不平衡：可將較輕一側的金幣移除，並從較重的一側中保留 m 枚金幣在此側秤盤，另 m 枚金幣移至另一個秤盤來秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。

(2) 若有 $4m+1$ 枚金幣
第一次可在天平兩側各放置 $2m$ 枚金幣。
若平衡：則這 $4m$ 枚金幣都是真幣，第二次秤重時，從這 $4m$ 枚真幣中任選 1 枚放置在左盤、尚未被秤重的金幣都放在右盤，則平衡時沒有假幣、右盤重則假幣比真幣重、右盤輕則假幣比真幣輕；
若不平衡：可知第一次秤重時使用的 $4m$ 枚金幣中必有假幣。接著將較輕一側的金幣移除，並從較重的一側中保留 m 枚金幣在此側秤盤，另 m 枚金幣移至另一個秤盤來秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。

(3) 若有 $4m+2$ 枚金幣
第一次可在天平兩側各放置 $2m$ 枚金幣。
若平衡：則這 $4m$ 枚金幣都是真幣，第二次秤重時，從這 $4m$ 枚真幣中任選 2 枚放置在左盤、尚未被秤重的 2 枚金幣都放在右盤，則平衡時沒有假幣、右盤重則假幣比真幣重、右盤輕則假幣比真幣輕；
若不平衡：可知第一次秤重時使用的 $4m$ 枚金幣中必有假幣。接著將較輕一側的金幣移除，並從較重的一側中保留 m 枚金幣在此側秤盤，另 m 枚金幣

移至另一個秤盤來秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。

(4) 若有 $4m+3$ 枚金幣

【方法 1】

第一次可在天平兩側各放置 $2m$ 枚金幣。

若平衡：則這 $4m$ 枚金幣都是真幣，第二次秤重時，從這 $4m$ 枚真幣中任選 3 枚放置在左盤、尚未被秤重的 3 枚金幣都放在右盤，則平衡時沒有假幣、右盤重則假幣比真幣重、右盤輕則假幣比真幣輕；

若不平衡：可知第一次秤重時使用的 $4m$ 枚金幣中必有假幣。接著將較輕一側的金幣移除，並從較重的一側中保留 m 枚金幣在此側秤盤，另 m 枚金幣移至另一個秤盤來秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。

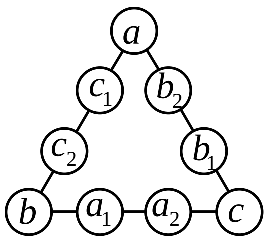
【方法 2】

第一次可在天平兩側各放置 $2m+1$ 枚金幣。

若平衡：則這 $4m+2$ 枚金幣都是真幣，第二次秤重時，從這 $4m+2$ 枚真幣中任選 1 枚放置在左盤、尚未被秤重的 1 枚金幣都放在右盤，則平衡時沒有假幣、右盤重則假幣比真幣重、右盤輕則假幣比真幣輕；

若不平衡：不妨將重的一側上的 $2m+1$ 枚金幣與尚未被秤重的 1 枚金幣這 $2m+2$ 枚金幣分成各有 $m+1$ 枚金幣的二堆並分別放置在天平兩側秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。

3. 數 1、2、…、9 不重複地填入以下的圓圈內，每個圈內恰填入一個數，使得在同一條線上四個數之和都等於 20。若填入的數如圖所示分別為 a、a_1、a_2、b、b_1、b_2、c、c_1、c_2，則須滿足 $a>b>c$ 且 $a_1>a_2$、$b_1>b_2$、$c_1>c_2$。請寫出所有可能的解答。



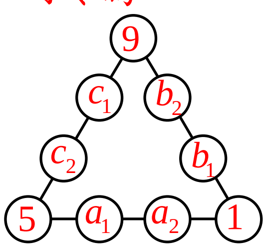
【解 1】

由各邊之和相加所得的總和為 60 可推知

$$a+b+c+1+2+3+4+5+6+7+8+9=60,$$

即 $a+b+c=15$：

(i) 若 a、b、c 依序為 9、5、1，可令為

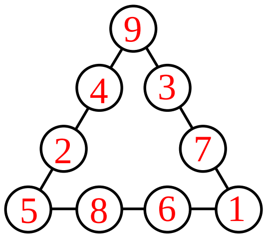


由 $c_1+c_2=20-9-5=6$ 知此時 c_1、c_2 依序只可能為 4、2，

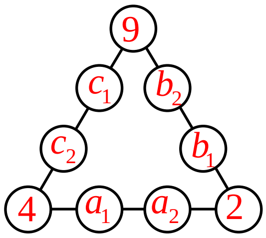
接著再由 $b_1+b_2=20-9-1=10$ 知此時 b_1、b_2 依序只可能為 7、3，

最後再由 $a_1+a_2=20-5-1=14$ 知此時 a_1、a_2 依序只可恰為 8、6，

故可得一組解：



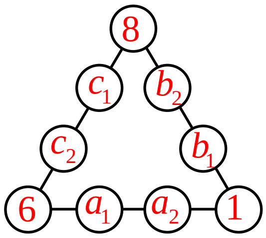
(ii) 若 a、b、c 依序為 9、4、2，可令為



由 $c_1+c_2=20-9-4=7$ 知此時 c_1、c_2 依序只可能為 6、1，

但接著再由 $b_1+b_2=20-9-2=9$ 知此時 b_1、b_2 不可能填入數碼，故無解。

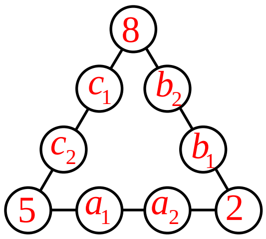
(iii) 若 a、b、c 依序為 8、6、1，可令為



由 $c_1+c_2=20-8-6=6$ 知此時 c_1、c_2 依序只可能為 4、2，

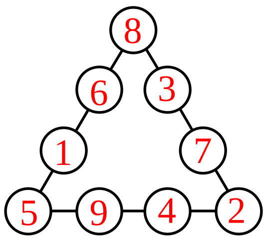
但接著再由 $b_1+b_2=20-8-1=11$ 知此時 b_1、b_2 不可能填入數碼，故無解。

(iv) 若 a、b、c 依序為 8、5、2，可令為

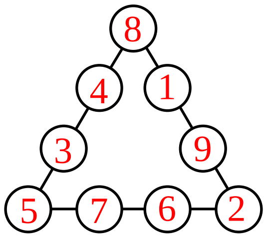


由 $c_1+c_2=20-8-5=7$ 知此時 c_1、c_2 依序可能為 6、1 或是 4、3：

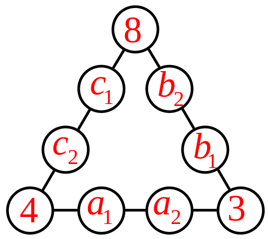
若 c_1、c_2 依序是 6、1，接著再由 $b_1+b_2=20-8-2=10$ 知此時 b_1、b_2 依序只可能為 7、3，最後再由 $a_1+a_2=20-5-2=13$ 知此時 a_1、a_2 依序只可恰為 9、4，故可得一組解：



若 c_1、c_2 依序是 4、3，接著再由 $b_1+b_2=20-8-2=10$ 知此時 b_1、b_2 依序只可能為 9、1，最後再由 $a_1+a_2=20-5-2=13$ 知此時 a_1、a_2 依序只可恰為 7、6，故可得一組解：

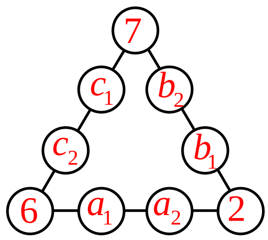


(v) 若 a、b、c 依序為 8、4、3，可令為



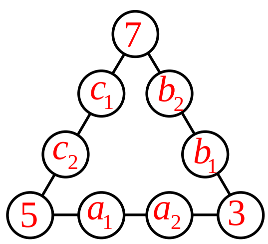
由 $c_1+c_2=20-8-4=8$ 知此時 c_1、c_2 依序可能為 7、1 或是 6、2，
但由 $a_1+a_2=20-4-3=13$ 知此時 a_1、a_2 依序只可能為 7、6，故無解。

(vi) 若 a、b、c 依序為 7、6、2，可令為



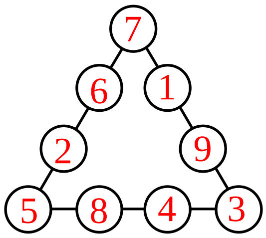
由 $c_1+c_2=20-7-6=7$ 知此時 c_1、c_2 依序只可能為 4、3，
但接著再由 $b_1+b_2=20-7-2=9$ 知此時 b_1、b_2 不可能填入數碼，故無解。

(vii)若 a、b、c 依序為 7、5、3，可令為

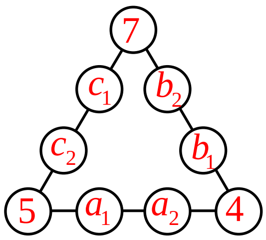


由 $c_1+c_2=20-7-5=8$ 知此時 c_1、c_2 依序只可能為 6、2，
接著再由 $b_1+b_2=20-7-3=10$ 知此時 b_1、b_2 依序只可能為 9、1，
最後再由 $a_1+a_2=20-5-3=12$ 知此時 a_1、a_2 依序只可恰為 8、4，

故可得一組解：

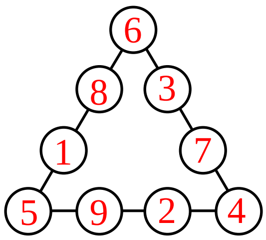


(viii)若 a、b、c 依序為 6、5、4，可令為

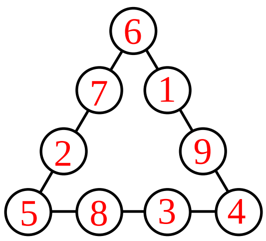


由 $c_1+c_2=20-6-5=9$ 知此時 c_1、c_2 依序可能為 8、1 或是 7、2：

若 c_1、c_2 依序是 8、1，接著再由 $b_1+b_2=20-6-4=10$ 知此時 b_1、b_2 依序只可能為 7、3，最後再由 $a_1+a_2=20-5-4=11$ 知此時 a_1、a_2 依序只可恰為 9、2，故可得一組解：



若 c_1、c_2 依序是 7、2，接著再由 $b_1+b_2=20-6-4=10$ 知此時 b_1、b_2 依序只可能為 9、1，最後再由 $a_1+a_2=20-5-4=11$ 知此時 a_1、a_2 依序只可恰為 8、3，故可得一組解：



【解 2】

由各邊之和相加所得的總和為 60 可推知

$$a+b+c+1+2+3+4+5+6+7+8+9=60，$$

即 $a+b+c=15$，因此可推知 a、b、c 為以下幻方中任意一列、任意一行或任意一主對角線中的三個數：

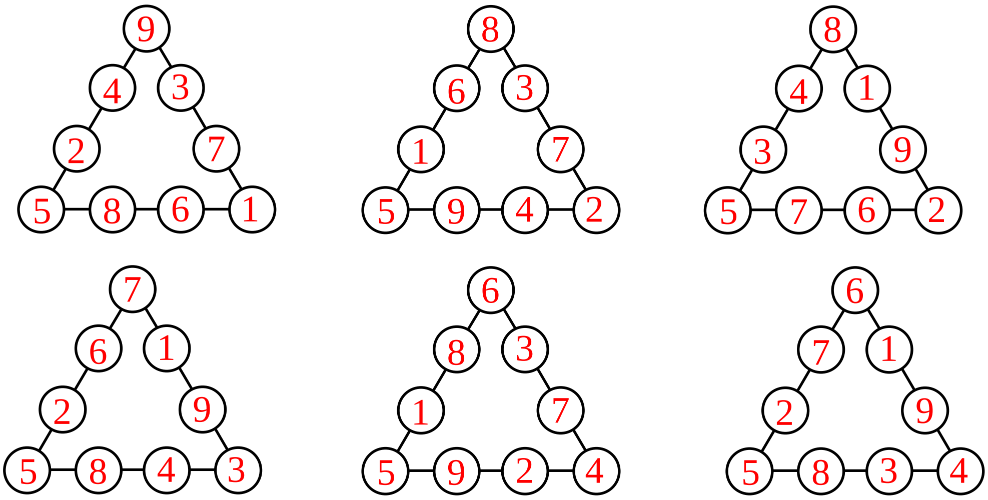
8	1	6
3	5	7
4	9	2

且也可得 $a_1+a_2=20-(b+c)=a+20-(a+b+c)=a+5$，

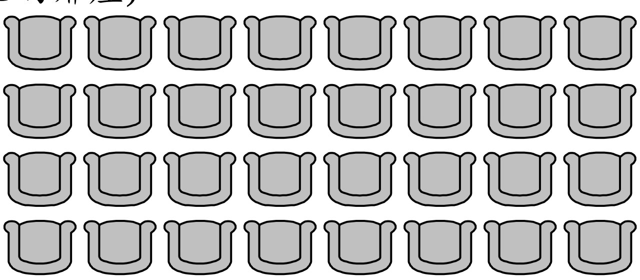
同理，$b_1+b_2=b+5$ 與 $c_1+c_2=c+5$。故可列表如下：

<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>$\{a_1$、a_2、b_1、b_2、c_1、$c_2\}$</th><th>a_1+a_2</th><th>b_1+b_2</th><th>c_1+c_2</th></tr>
<tr><td>9</td><td>4</td><td>2</td><td>{1, 3, 5, 6, 7, 8}</td><td>6 + 8</td><td></td><td>1 + 6</td></tr>
<tr><td>8</td><td>6</td><td>1</td><td>{2, 3, 4, 5, 7, 9}</td><td>4 + 9</td><td></td><td>2 + 4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>3</td><td>{1, 2, 5, 6, 7, 9}</td><td>6 + 7</td><td>2 + 7</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>6</td><td>2</td><td>{1, 3, 4, 5, 8, 9}</td><td></td><td>3 + 8</td><td>3 + 4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">9</td><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">{2, 3, 4, 6, 7, 8}</td><td rowspan="3">6 + 8</td><td>2 + 8</td><td rowspan="3">2 + 4</td></tr>
<tr><td>3 + 7</td></tr>
<tr><td>4 + 6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">8</td><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">{1, 3, 4, 6, 7, 9}</td><td>4 + 9</td><td>3 + 7</td><td>1 + 6</td></tr>
<tr><td></td><td>4 + 6</td><td></td></tr>
<tr><td>6 + 7</td><td>1 + 9</td><td>3 + 4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">7</td><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">{1, 2, 4, 6, 8, 9}</td><td rowspan="3">4 + 8</td><td>2 + 8</td><td rowspan="3">2 + 6</td></tr>
<tr><td>1 + 9</td></tr>
<tr><td>4 + 6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6</td><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">{1, 2, 3, 7, 8, 9}</td><td>2 + 9</td><td>3 + 7</td><td>1 + 8</td></tr>
<tr><td></td><td>2 + 8</td><td></td></tr>
<tr><td>3 + 8</td><td>1 + 9</td><td>2 + 7</td></tr>
</table>

故可得知共有 6 組解：

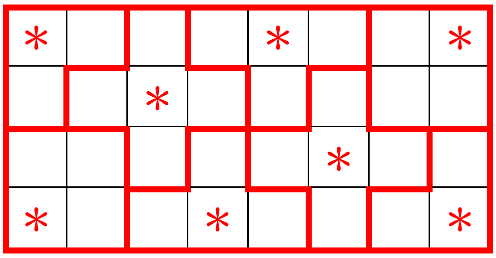


4. 有政客與正直的人共 32 人開會，他們分為 4 排就座，每排 8 人，如下圖所示，每個人都知道誰是政客誰是正直的人。休會時，每位成員都聲稱，在他的鄰座中有正直的人，也有政客。現知，每位政客都說謊話，每位正直的人都說真話。請問至少有多少位政客？(坐在一個人的正前方、正後方、左側、右側相鄰的人都算是他的鄰座)



【解】

將座位如下左圖所示分為 8 個區域，每個區域內至少要有一位政客，否則標記＊的位置是正直的人，且其鄰座也都是正直的人，這是與題意矛盾的，所以至少要有 8 個政客。下右圖為 8 位政客一種滿足題意的座位：



	◎				◎		
			◎				◎
◎				◎			
		◎				◎	

答：8 個