

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2015 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第一試：應用題（考試時間 90 分鐘）

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 一位火車乘客在距離目的地一半的路程處開始睡著了，直到距離目的地還有他睡著時火車所走過路程的一半時才醒來。請問整個路程的幾分之幾他在睡覺？

【解】

可令他醒來時至目的地這段時間火車所走的路程為 1，則可知他睡著時火車所走的路程為 2，因此全程為 6 且可得知他睡著的這段時間火車所走的路程佔全程的 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

答： $\frac{1}{3}$

2. 已知有兩個鐘同時顯示上午 9:00。而當第一個鐘在同一天顯示上午 10:00 時，另一個鐘則顯示上午 10:04。若這兩個鐘都以勻速轉動，當第一個鐘在同一天顯示下午 1:30 時，請問另一個鐘顯示的時間為下午幾點幾分？

【解 1】

可知這兩個鐘的轉速比為 $60:64 = 15:16$ 。當第一個鐘顯示同一天的下午 1:30 時，共走了 $4.5 \times 60 = 270$ 分鐘，在此同時，另一個鐘共走了 $270 \times \frac{16}{15} = 288$ 分鐘，因此另一個鐘顯示的時間為下午 1:48。

【解 2】

第一個鐘從顯示上午 9:00 到顯示下午 1:30 時，共走了 4 個半小時，而因另一個鐘每小時快 4 分鐘，故總共快了 $4 \times 4 \frac{1}{2} = 18$ 分鐘，所以另一個鐘顯示的時間為下午 1:48。

答：下午 1:48

3. 請問在一個凸多邊形中最多可能有幾個銳角？

【解】

可知凸多邊形中一個角為銳角時，則該角的外角必為鈍角。因多邊形所有的外角之和恆為 360° ，而每一個鈍角皆大於 90° ，故可判斷出至多有 3 個外角為鈍角，即至多有 3 個內角為銳角。而銳角三角形是具有 3 個內角為銳角的凸多邊形，故一個凸多邊形中最多可能有 3 個銳角。

答：3 個

4. 糖果店有 15 種巧克力糖、42 種水果糖、25 種軟糖。小強想從三類糖中挑選兩類各購買一顆糖，請問他有多少種不同的選擇方式？

【解】

若小強買巧克力糖、水果糖各一個，則有 $15 \times 42 = 630$ 種選擇的方式；

若小強買水果糖、軟糖各一個，則有 $42 \times 25 = 1050$ 種選擇的方式；

若小強買軟糖、巧克力糖各一個，則有 $25 \times 15 = 375$ 種選擇的方式。

故合計共有 $630 + 1050 + 375 = 2055$ 種不同的選擇方式。

答：2055 種

5. 書商寄送了物理書、化學書及生物書共 60 本，其中物理書每本 50 元、化學書每本 75 元及生物書每本 100 元。已知物理書的總價等於化學書的總價，且化學書的總價大於生物書的總價。若物理書共有奇數本，請問書商寄送的生物書共有多少本？

【解】

因物理書的總價等於化學書的總價，故可得知物理書的數量與化學書的數量之比為 $75 : 50 = 3 : 2$ ，再由物理書有奇數本可知物理書至多 33 本，此時化學書共 22 本總價 1650 元，而生物書共有 5 本總價 500 元；物理書數量次大的可能值為 27 本，此時化學書共 18 本總價 1350 元，而生物書共有 15 本總價 1500 元，不合；接下來物理書數量的可能值繼續降低時，化學書數量也會降低而生物書數量會增加，即化學書的總價不可能大於生物書的總價。故知僅 33 本物理書、22 本化學書與 5 本生物書可滿足題意。

答：5 本

6. A、B、C、D 四位選手進行網球單循環賽。已知 A 勝 D 且 A、B、C 三人的勝場數相同，請問 D 勝了幾場？

【解】

四人進行單循環賽，故知共舉行 $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ 場比賽，即四人合計共有 6 個勝場。現

因已知 A 勝 D 且 A、B、C 三人的勝場數相同，故可判斷出 A、B、C 三人各勝 1 場或各勝 2 場。而若是 A、B、C 三人各勝 1 場，因 A 勝 D，故知 B 勝 A、C 勝 A，此時 B 與 C 之間的比賽無論是誰獲勝，都與 A、B、C 三人各勝 1 場矛盾，因此可確知 A、B、C 三人各勝 2 場，合計共贏了 6 場，故知 D 的勝場數為 0，此時也可判斷出 A、B、C 三人彼此之間的勝負場數各為 1 勝 1 負，例如 A 勝 B、B 勝 C、C 勝 A。

答：0 場

7. 有三堆珠子，分別有 11 顆、7 顆、6 顆。每次操作都選擇其中二堆，並從數量較多的一堆取出珠子將數量較少的一堆的顆數加倍。請問至少要操作幾次才能使得三堆珠子都各有 8 顆珠子？

【解】

因每次操作只有其中二堆數目會改變，且最後要使得三堆珠子都各有 8 顆珠子，故可用逆推法，知在最後一次操作前，三堆珠子的數目應為 4 顆、8 顆、12 顆。此時可判斷出操作一次不可能完成，且再向前一次操作後只可能為 2 顆、10 顆、12 顆，或是 2 顆、8 顆、14 顆，或是 4 顆、4 顆、16 顆，或是 10 顆、8 顆、6 顆，或是 4 顆、14 顆、6 顆，因此操作二次也不可能完成，即至少要操作三次，

只要將 4 顆、14 顆、6 顆的情況再向前一次操作後即可能得 11 顆、7 顆、6 顆。故操作三次的手法為：令 A 堆中有 11 顆珠子、B 堆中有 7 顆珠子、C 堆中有 6 顆珠子，則第一次操作為從 A 堆中取出 7 顆到 B 堆中，此時 A 堆中有 4 顆珠子、B 堆中有 14 顆珠子、C 堆中有 6 顆珠子；第二次操作為從 B 堆中取出 6 顆到 C 堆中，此時 A 堆中有 4 顆珠子、B 堆中有 8 顆珠子、C 堆中有 12 顆珠子；第三次操作為從 C 堆中取出 4 顆到 A 堆中，此時三堆珠子都各有 8 顆珠子。

答：3 次

8. 給定六個數碼：0、1、2、3、4、5。請問由這些數碼所組成的所有偶四位數的和等於多少？(註：同一數碼可以在同一個數內重複出現)。

【解】

可知個位數碼共有 0、2 或 4 這三種選擇、十位數碼與百位數碼各有六種選擇、千位數共有 1、2、3、4 或 5 這五種選擇。

因此所有偶四位數的個位數碼的總和為 $(0+2+4) \times 5 \times 6 \times 6 = 1080$

所有偶四位數的十位數碼的總和為 $(0+1+2+3+4+5) \times 5 \times 6 \times 3 \times 10 = 13500$

所有偶四位數的百位數碼的總和為 $(0+1+2+3+4+5) \times 5 \times 6 \times 3 \times 100 = 135000$

所有偶四位數的千位數碼的總和為 $(1+2+3+4+5) \times 6 \times 6 \times 3 \times 1000 = 1620000$

即所求之值為 $1620000 + 135000 + 13500 + 1080 = 1769580$ 。

答：1769580

9. 小華總共步行 3.5 小時，在他步行期間任何一小時的時間間隔中，他步行距離都為 5 km。請問他行走的平均速度最大為每小時多少 km？

【解】

可知在前 3 小時小華總共行走 15 km，且在剩下來的 0.5 小時內小華至多可再行走 5 km，所以他行走的總路程大於等於 15 km 且小於等於 20 km，換言之，他

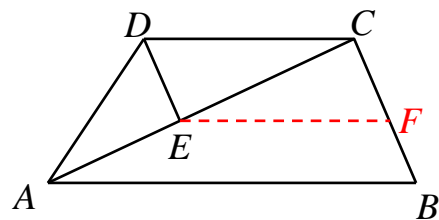
行走的平均速度最大為每小時 $\frac{20}{3.5} = \frac{40}{7}$ km，可用以下方式達到此最大平均速

度：將 3.5 小時等分為七段期間，每段 0.5 小時，並且在奇數段期間小華都行走 5 km，在偶數段期間小華都靜止不動，則他每小時行走的平均速度即為

$\frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$ km。

答： $\frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$ km

10. 平面上有一個梯形 ABCD，其中 $AB \parallel CD$ ，且在對角線 AC 上有一點 E 使得 $DE \parallel BC$ ，如圖所示。已知三角形 AED 的面積為 60 cm^2 且三角形 CED 的面積為 80 cm^2 ，請問梯形 ABCD 的面積為多少 cm^2 ？



【解 1】

在 BC 上取一點 F 使得 $CF = DE$ 。在四邊形 CDEF 中，因 $CF = DE$ 且 $CF \parallel DE$ ，故四邊形 CDEF 是平行四邊形，因此三角形 CEF 與 CED 的面積相等，即 80 cm^2 。

而因三角形 AED 與 CED 有共同邊 DE ，故知 $\frac{AE}{EC} = \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle CED}} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ ，再由三角形

CEF 與 CAB 相似，故知 $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}} = \left(\frac{CE}{CA}\right)^2 = \left(\frac{4}{3+4}\right)^2 = \frac{16}{49}$ ，即 $\frac{80}{S_{\triangle CAB}} = \frac{16}{49}$ ，因此可

得知 $S_{\triangle CAB} = 5 \times 49 = 245 \text{ cm}^2$ ，即可得梯形 $ABCD$ 的面積為 $60 + 80 + 245 = 385 \text{ cm}^2$ 。

【解 2】

若將 AE 與 CE 分別視為三角形 ADE 與 CDE 的底，則這兩個三角形有相同的高，

故知 $\frac{CE}{CA} = \frac{80}{60+80} = \frac{4}{7}$ 。現過點 E 作一條平行於 AB 的直線，交 BC 於點 F ，則可

知 $CDEF$ 為平行四邊形且知三角形 CDE 與 CFE 有相同的面積，因此三角形 ABC

的面積為 $80 \times \frac{7^2}{4^2} = 245 \text{ cm}^2$ 。所以梯形 $ABCD$ 的面積為 $60 + 80 + 245 = 385 \text{ cm}^2$ 。

答：385 cm^2

11. 請問在正整數 1、2、3、...、2015 中最多可以選出多少個數，使得所選出的數之中的任兩個數之差都不是質數？

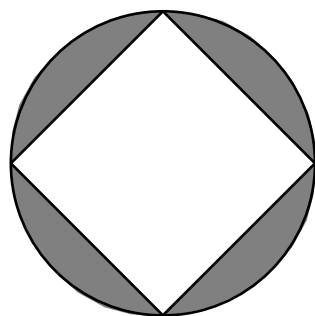
【解】

因最小的合數為 4，故將 1、2、3、...、2015 這些數依照被 4 除之後所得的餘數分類，可知除了其中一類僅有 503 個數以外，其餘每一類都會有 504 個數。此時若選擇有 504 個數的一類，則當中任二個數的差為 4 的倍數，即不會是質數而滿足題意。此時即驗證了若選擇一個正整數，則至多只可選擇其中一類。且明顯可知，比這個數大 2、3、5 或 7 的數不可能被選擇，而在比這個數大 1、4、6 的數中，其兩兩之間的差為 2、3 與 5，故至多只能選擇其中一個數。因此無法選擇多於這些數的四分之一，故總共至多能選出 504 個數，例如選擇 1、5、9、...、 $4k+1$ 、...、2009、2013 這 504 個數。

答：504 個數

12. 有一個正方形在圓形的內部且四個頂點都在圓周上。已知圖中陰影部分的面積為 224 cm^2 ，請問這個圓的半徑為多少 cm ？(圓周率 $\pi = \frac{22}{7}$)

積為 224 cm^2 ，請問這個圓的半徑為多少 cm ？(圓周率 $\pi = \frac{22}{7}$)



【解】

可知正方形的面積恰為圓半徑平方的 2 倍，而圓面積為圓半徑平方的 π 倍，

因此圓半徑平方為 $224 \div \left(\frac{22}{7} - 2\right) = 196 \text{ cm}^2$ ，故可推知圓半徑為 14 cm 。

答：14 cm

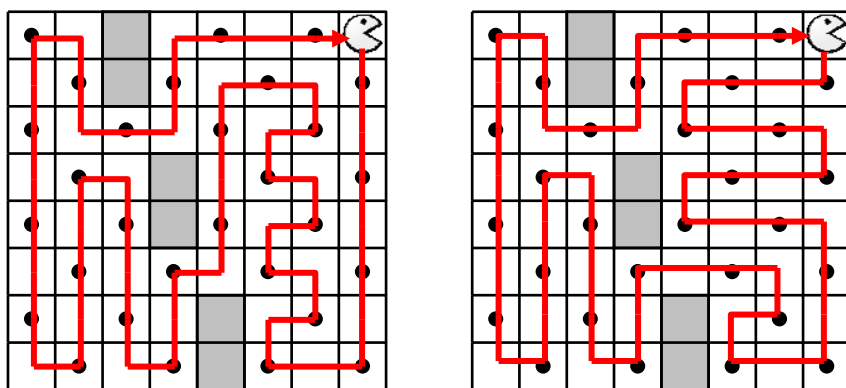
2015 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第二 試：綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

1. 小精靈在 8×8 棋盤的右上角的小方格內，它只可以水平或鉛直移動，但不可以通過任何小方格二次或二次以上，也不可以通過任何一個塗陰影部分的小方格，小方格中心的黑點是寶物。請畫出小精靈的一條移動路徑，使得它吃完所有的寶物最後再回到原來的小方格。

【解】

路徑不唯一，以下是其中二個解答。



2. 有 10 枚金幣，可能全都是重量相同的真幣，也有可能恰有一枚假幣，但此枚假幣可能比真幣重，也可能比真幣輕。請問至少要用沒有刻度的兩臂天平秤幾次，才能確定有沒有假幣？若有假幣，還必須要判定此假幣比真幣輕或重。(註：必須詳細說明如何秤，但並不要求找出此枚假幣)

【解】

可知若有假幣，秤重一次不可能判定此假幣比真幣輕或重。而利用以下方法最多秤重二次即可判別：

第一次秤重時，在天平兩側各放置 4 枚金幣。若平衡，則這 8 枚金幣都是真幣，第二次秤重時，從這 8 枚真幣中任選 2 枚放置在左盤、尚未被秤重的金幣都放在右盤，則平衡時沒有假幣、右盤重則假幣比真幣重、右盤輕則假幣比真幣輕；第一次秤重若不平衡，則不妨將重的一側上的 4 枚金幣兩兩放置在天平兩側秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。

答：2 次

3. 將 10 枚相同的金幣放在 4×4 的方格表內，每個小方格內至多放一枚金幣，使得每一行與每一列都有金幣且都是偶數枚。下圖是其中一種放法，請問共有多少種不同的放法？

【解】

可知將 10 枚金幣放在四列中使得每一列都有偶數枚金幣的分法在不考慮排列順序下，只有 4、2、2、2 這一種分法，同樣地，放在四行中使得每一行都有偶數枚金幣的分法也是只有 4、2、2、2，亦即恰有一行及一列都是有 4 枚金幣，故恰都放

○	○		
○	○	○	○
	○	○	
	○		○

有 4 枚金幣的行與列共有 $4 \times 4 = 16$ 種放法。接著觀察除了都放有 4 枚金幣的一行與一列以外的 9 個方格，這 9 個方格在不變動相對位置的情況下恰可拼成一個 3×3 的方格表，且放置最後 3 枚金幣後，需使得每一行與每一列都恰有 1 枚金幣，可得知共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 種方法。因此合計共有 $16 \times 6 = 96$ 種不同的放法。

答：96 種

4. 將一個 8×8 棋盤的行由左至右依序編號、列由下至上依序編號後，將兩個小方格行的編號大者減編號小者的差與列的編號大者減編號小者的差，定義它們之距離為這兩個差之和。現將此棋盤上的每個小方格都塗上一種顏色，而若要使兩個小方格之距離為 6 的格子都塗上不同的顏色，請問將此棋盤塗滿至少要使用多少種不同的顏色？並請在圖上標示塗法。(請用不同的文字或英文字母分別表示不同的顏色，並填在 8×8 方格表中的格子內)

【解】

若兩個小方格之距離為 6，則在黑白相間塗色的棋盤上，這兩個小方格必同時為白色或同時為黑色。所以我們只須討論白色小方格的情況。在下左圖中，標記有圓圈的四個小方格相互之間的距離都等於 6，所以至少需要使用四種顏色。在圖上所標記用四種顏色塗色的方法即滿足要求。注意到任意兩個塗同顏色的小方格之間的距離都是 4 的倍數，而 6 不是 4 的倍數，所以證明了白色小方格只需使用四種顏色就足夠。至於黑色小方格，我們只要塗與它正上方白色小方格相同的顏色即可（第一列的黑色小方格塗與它同行最下方白色小方格相同的顏色），故整個棋盤只需使用四種顏色就足夠了，如下右圖所示。

	2		④		2		4
3		1		3		1	
	4		2		4		2
①		3		1		③	
	2		4		2		4
3		1		3		1	
	4		②		4		2
1		3		1		3	

A	B	C	D	A	B	C	D
C	B	A	D	C	B	A	D
C	D	A	B	C	D	A	B
A	D	C	B	A	D	C	B
A	B	C	D	A	B	C	D
C	B	A	D	C	B	A	D
C	D	A	B	C	D	A	B
A	D	C	B	A	D	C	B

答：4 種