

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

# 2015 小學數學競賽選拔賽初賽試題

## 第二試：應用題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分

1. 請問由四個互相不同的數碼所構成的四位數中，最大的數與最小的數之差是什麼？

【解】

可知最大的數為 9876，最小的數為 1023，其差為  $9876 - 1023 = 8853$ 。

答：8853

2. 孫家有七位姊妹，她們的年齡都不同且相鄰兩姊妹都相差二歲。已知大姊今年的年齡是最小妹的 3 倍，請問大姊今年幾歲？

【解】

由相鄰兩姊妹都間隔二歲可知大姊比最小妹妹的多了  $2 \times (7 - 1) = 12$  歲，因大姊年齡是最小妹的 3 倍，故知大姊比最小妹妹多的歲數恰為最小妹妹年齡的 2 倍，故最小妹妹的年齡為  $12 \div 2 = 6$  歲，即可得知大姊的年齡是  $3 \times 6 = 18$  歲。

答：18 歲

3. 請問從 1~9999 這 9999 個數的數碼之總和為多少？

【解 1】

可把 0 一起放進來一起考慮，可知其數碼總和不變。接著按照頭尾依序配對：

$(0, 9999)$ 、 $(1, 9998)$ 、 $(2, 9997)$ 、 $\dots$ 、 $(4999, 5000)$  共 5000 組。

可發現每一組的數碼總和都是 36。因此所求為  $36 \times 5000 = 180000$ 。

【解 2】

可把 0 一起放進來一起考慮，並將一位數、二位數、三位數的前面都補上 0 使之成為四位數的形式。此時因是從 0000~9999 的連續整數，故知這 10000 組個

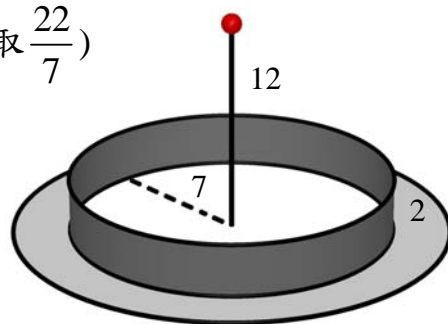
位數碼、十位數碼、百位數碼、千位數碼中，0~9 的每一個數碼都各佔  $\frac{1}{10}$ ，即

可以配成 4000 組  $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ ，因此所求的數碼總和為

$$4000 \times (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 180000。$$

答：180000

4. 一座圓形牧場的圍牆高 2 m，而這個牧場的半徑為 7 m。在這個牧場的圓心上有一座高為 12 m 的燈柱。在深夜當這座燈柱點燈時(燈源視為一小點)，請問牆外地面上的陰影面積為多少  $m^2$ ？(圓周率取  $\frac{22}{7}$ )



**【解】**

如圖，令圓心為  $O$ 、燈的位置為  $A$ 、圍牆上一條與地面垂直的線段為  $DC$ ，則線段  $DC$  的陰影為線段  $BC$ 。可知三角形  $OAB$  與  $CDB$  為相似三角形，故有

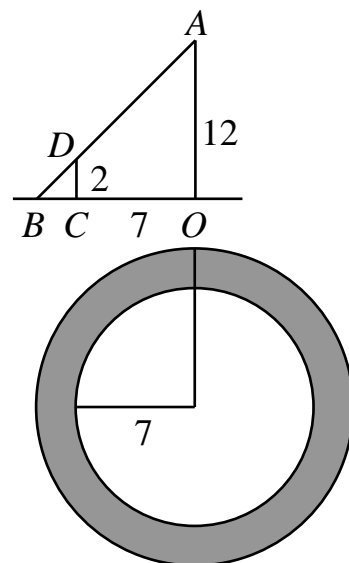
$$\frac{BO}{BC} = \frac{BC+CO}{BC} = \frac{AO}{CD} = \frac{12}{2} = 6, \text{ 可得 } CO=5BC, \text{ 再因}$$

$OC=7\text{m}$ ，故可得知  $BC = \frac{7}{5}\text{m}$ 。而牆外陰影部分為如圖

所示同心圓的外環部分，可知同心圓內圓半徑為  $7\text{m}$ ，

外圓半徑則為  $7 + \frac{7}{5} = \frac{42}{5}\text{m}$ ，故陰影部分面積為

$$\frac{22}{7} \times \frac{42}{5} \times \frac{42}{5} - \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = \frac{1694}{25} = 67\frac{19}{25} = 67.76\text{m}^2。$$



$$\text{答：} \frac{1694}{25} = 67\frac{19}{25} = 67.76\text{m}^2$$

5. 請問將 12 顆蘋果分給大寶、二寶與小寶，且每人至少分得一顆蘋果的分法共有幾種？

**【解 1】**

可知將 12 顆蘋果分成三堆共有  $(10, 1, 1)$ 、 $(9, 2, 1)$ 、 $(8, 3, 1)$ 、 $(8, 2, 2)$ 、 $(7, 4, 1)$ 、 $(7, 3, 2)$ 、 $(6, 5, 1)$ 、 $(6, 4, 2)$ 、 $(6, 3, 3)$ 、 $(5, 5, 2)$ 、 $(5, 4, 3)$ 、 $(4, 4, 4)$  這 12 種方法；其中若三堆的數目兩兩不同時，每一種分法共有  $3 \times 2 \times 1 = 6$  種方式分給三人，而若三堆中有兩堆的數目相同時，每一種分法共有 3 種方式分給三人，而若三堆的數目都相同時，每一種分法僅有 1 種方式分給三人，合計共  $6 \times 7 + 3 \times 4 + 1 \times 1 = 55$  種方法。

**【解 2】**

可知大寶可分得 1、2、 $\dots$ 、或 10 顆蘋果。若大寶分得 10 顆蘋果，則二寶僅可分得 1 顆蘋果，小寶可分得 1 顆蘋果；若大寶分得 9 顆蘋果，則二寶可分得 1 或 2 顆蘋果，小寶可分得的數量則已相對應確定；若大寶分得 8 顆蘋果，則二寶可分得 1、2 或 3 顆蘋果，小寶可分得的數量則已相對應確定； $\dots$ ，依此類推，故知共有  $1+2+3+\dots+10 = 55$  種方法。

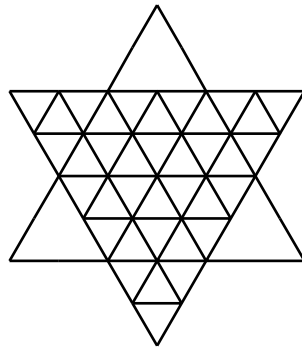
**【解 3】**

可把 12 顆蘋果排成一列，則蘋果與蘋果之間的空隙共有 11 個。若從這 11 個空隙間任意選出 2 個各放置一根木棍而將這些蘋果依序分成三堆，讓大寶取得第一根木棍以左的所有蘋果、二寶取得兩根木棍之間的所有蘋果、小寶取得第二根木棍以右的所有蘋果，即可得知每一種放置木棍的方法都對應出一種分法。

從 11 個空隙間任意選出 2 個的方法有  $\frac{11 \times 10}{2} = 55$  種，即有 55 種不同的方法。

答：55 種

6. 若下圖中所有的三角形都是正三角形，請問下圖中總共有多少個在不同位置的正三角形？



【解】

不妨令最小的正三角形之邊長為 1。則邊長為 1 的正三角形共有 36 個、邊長為 2 的正三角形共有 24 個、邊長為 3 的正三角形共有 14 個、邊長為 4 的正三角形共有 9 個、邊長為 5 的正三角形共有 3 個、邊長為 6 的正三角形共有 2 個，合計共  $36 + 24 + 14 + 9 + 3 + 2 = 88$  個正三角形。

答：88 個

7. 遊樂園入場券的編號由 00000 到 99999。如果一張入場券的號碼中有某兩個相鄰的數碼之差恰等於 5，則稱它為幸運券。請問共有多少張幸運券？

【解】

可從計算不是幸運券的張數來反推。設入場券的號碼為  $\overline{abcde}$ 。對於  $a$  來說，共有 10 個數碼可以選擇。將 10 個數碼分為 5 對： $(0, 5)$ 、 $(1, 6)$ 、 $(2, 7)$ 、 $(3, 8)$ 、 $(4, 9)$ ，每一對中的兩個數之差為 5，對於不是幸運券而言，一旦選好了  $a$  之後， $b$  只有 9 種選法(即不能選與  $a$  在同一對的另一個數碼)；同理，在選好  $b$  之後， $c$  也只有 9 種選法，餘此類推。所以不是幸運券的張數共有  $10 \times 9^4$ ，因此幸運券共有  $10^5 - 10 \times 9^4 = 34390$  張。

答：34390 張

8. 有 8 枚外觀相同之金幣，可能全都是重量相同的真幣，也有可能恰有一枚假幣，但此枚假幣可能比真幣重，也可能比真幣輕。請問至少要用沒有刻度的兩臂天平秤幾次，才能確定有沒有假幣？若有假幣，還必須要判定此假幣比真幣輕或重。(註：並不要求找出此枚假幣)

【解】

可知若有假幣，秤重一次不可能判定此假幣比真幣輕或重。而利用以下方法最多秤重二次即可判別：第一次秤重時，在天平兩側各放置 4 枚金幣。若平衡，則沒有假幣；若不平衡，則不妨將重的一側上的 4 枚金幣兩兩放置在天平兩側秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。

答：2 次

9. 小丁每天都以相同的勻速從家裡騎車去學校。某日，當他騎至全程的  $\frac{3}{4}$  時，車胎破了，剩下的距離他以勻速走路，結果他花了兩倍於平常從家裡騎車到學校的時間。請問小丁騎車的速度是走路速度的幾倍？

**【解 1】**

為了計算方便，可令家裡到學校的距離為 4，則知當小丁花了兩倍於平常從家裡騎車到學校的時間時，移動的距離為 8，因此從全程的  $\frac{3}{4}$  開始計時，到平常從家裡騎車到學校的時間的兩倍為止，所移動的距離為  $8-3=5$ ，而他從全程的  $\frac{3}{4}$  處走到學校所移動的距離為 1。因花費時間相同時，所移動的距離比即為速度比，故知小丁騎車的速度是走路速度的 5 倍。

**【解 2】**

可知小丁步行全程的  $\frac{1}{4}$  之路程所需的時間等於自行車騎全程的  $2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$  之路程所需的時間，故知小丁騎車的速度是走路速度的  $\frac{5}{4} \div \frac{1}{4}=5$  倍。

答：5 倍

10. 已知鵝蛋每顆 20 元、雞蛋每顆 4 元、鵪鶉蛋每顆 2 元。小華以 400 元買了這三種蛋共 100 顆，每一種蛋都至少買一顆，且其中有二種蛋的數量是相同的。請問小華共買了多少顆雞蛋？

**【解 1】**

(1) 如果雞蛋與鵪鶉蛋數量相同，則雞蛋與鵪鶉蛋平均一顆  $\frac{4+2}{2}=3$  元，比一顆鵝蛋少 17 元。若 100 顆全是鵝蛋，則共花了 2000 元，比實際上花了 400 元還多 1600 元，因此雞蛋與鵪鶉蛋共有  $\frac{1600}{17}$  顆，此不為整數，故不合。

(2) 如果鵝蛋與鵪鶉蛋數量相同，則鵝蛋與鵪鶉蛋平均一顆  $\frac{20+2}{2}=11$  元，比一顆雞蛋多 7 元。若 100 顆全是雞蛋，則恰花了 400 元，此時鵝蛋與雞蛋共有 0 顆，與每一種蛋都至少買一顆矛盾，故不合。

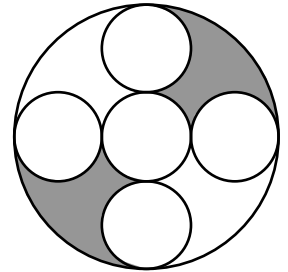
(3) 如果鵝蛋與雞蛋數量相同，則鵝蛋與雞蛋平均一顆  $\frac{20+4}{2}=12$  元，比一顆鵪鶉蛋多 10 元。若 100 顆全是鵪鶉蛋，則共花了 200 元，比實際上花了 400 元還少 200 元，因此鵝蛋與雞蛋共有  $\frac{200}{10}=20$  顆，即小華共買了雞蛋  $\frac{20}{2}=10$  顆。

**【解 2】**

可知小華買的蛋平均一顆為 4 元，此即恰為雞蛋的價錢。因一顆鵝蛋的價錢比平均價多了 16 元而一顆鵪鶉蛋的價錢比平均價少了 2 元，因此鵪鶉蛋數目必為鵝蛋數目的 8 倍。因此若是雞蛋與鵪鶉蛋的顆數相同，則所購買的蛋的總數必為  $1+8+8=17$  的倍數，此與題意不合，故可推知必是雞蛋與鵝蛋的顆數相同，且此時所購買的蛋的總數必為  $1+1+8=10$  的倍數，而 10 恰為 100 的因數，故滿足題意，所以可推知小華買了  $100 \div 10=10$  顆雞蛋。

答：10 顆

11. 有五個大小相同的小圓排成一個十字形並放置在一個大圓內，在中央的小圓的圓心與大圓的圓心重合，如圖所示。已知小圓半徑為大圓半徑的 $\frac{1}{3}$ ，且上、下兩個小圓圓心的連線與左、右兩個小圓圓心的連線都通過正中央小圓的圓心且兩線互相垂直。若每一個小圓的面積都是 $133\text{ cm}^2$ ，請問陰影部分的面積是多少 $\text{cm}^2$ ？(圓周率取 $\frac{22}{7}$ )



**【解】**

可知大圓的半徑為小圓的半徑的3倍，故大圓的面積為一個小圓的面積的 $3^2=9$ 倍，而由對稱性可知，大圓與小圓之間的四塊區域面積都相等，且都分別恰等於一個小圓的面積，所以陰影部分的面積為 $2 \times 133 = 266\text{ cm}^2$ 。

答： $266\text{ cm}^2$

12. 有100名拳擊選手參加比賽，他們的實力各不相同，假設每場比賽都是強者獲勝。比賽採用單淘汰賽，要從中確定出哪一位是實力第一強的選手、哪一位是實力第二強的兩名選手，請問最少需要比賽多少場？

**【解】**

可知要找出實力最強的一位選手，在採用單淘汰賽時，至少需比賽99場。此時因 $2^6=64 < 100 < 2^7=128$ ，故經過七輪即選出最強的選手，所以最強的選手只需與7位選手交手，而這7位選手中除了第一輪與最強的選手交手的人外，另外6位選手都必須曾打敗與他們交手的其餘選手。因此實力第二強的選手必在這7位選手之中，他們之中最強的即為實力第二強的選手，因此需讓這7位選手利用單淘汰賽另外再比6場。合計共需要比賽 $99+6=105$ 場。

答：105場