2015 小學數學競賽選拔賽初賽試題

第 二 試：應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ **請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分**

1. 請問由四個互相不同的數碼所構成的四位數中，最大的數與最小的數之差是什麼？

【解】

可知最大的數為 9876，最小的數為 1023，其差為$9876-1023=8853$。

答：8853

2. 孫家有七位姊妹，她們的年齡都不同且相鄰兩姊妹都相差二歲。已知大姊今年的年齡是最小妹妹的 3 倍，請問大姊今年幾歲？

【解】

由相鄰兩姊妹都間隔二歲可知大姊比最小妹妹的多了$2\times(7-1)=12$歲，因大姊年齡是最小妹妹的 3 倍，故知大姊比最小妹妹多的歲數恰為最小妹妹年齡的 2 倍，故最小妹妹的年齡為$12\div2=6$歲，即可得知大姊的年齡是$3\times6=18$歲。

答：18 歲

3. 請問從 1～9999 這 9999 個數的數碼之總和為多少？

【解 1】

可把 0 一起放進來一起考慮，可知其數碼總和不變。接著按照頭尾依序配對：

(0, 9999)、(1, 9998)、(2, 9997)、…、(4999, 5000)共 5000 組。

可發現每一組的數碼總和都是 36。因此所求為$36\times5000=180000$。

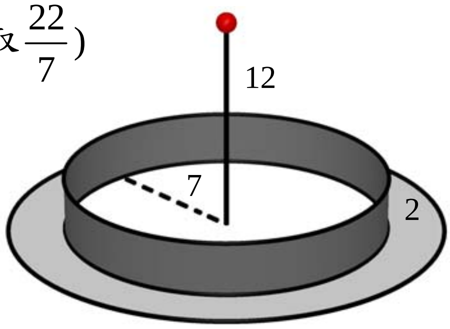
【解 2】

可把 0 一起放進來一起考慮，並將一位數、二位數、三位數的前面都補上 0 使之成為四位數的形式。此時因是從 0000～9999 的連續整數，故知這 10000 組個位數碼、十位數碼、百位數碼、千位數碼中，0～9 的每一個數碼都各佔$\frac{1}{10}$，即可以配成 4000 組(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)，因此所求的數碼總和為

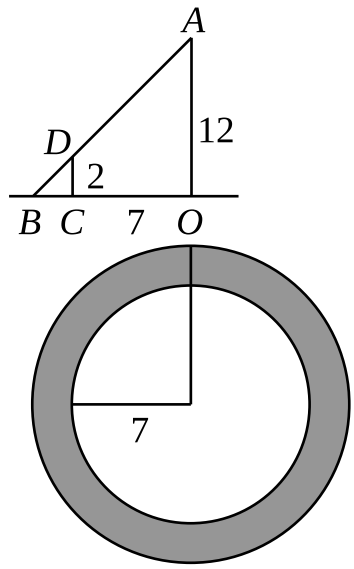
$$4000\times(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)=180000。$$

答：180000

4. 一座圓形牧場的圍牆高 2 m，而這個牧場的半徑為 7 m。在這個牧場的圓心上有一座高為 12 m 的燈柱。在深夜當這座燈柱點燈時(燈源視為一小點)，請問牆外地面上的陰影面積為多少 m^2？(圓周率取$\frac{22}{7}$)



【解】



如圖，令圓心為 O、燈的位置為 A、圍牆上一條與地面垂直的線段為 DC，則線段 DC 的陰影為線段 BC。可知三角形 OAB 與 CDB 為相似三角形，故有

$\dfrac{BO}{BC}=\dfrac{BC+CO}{BC}=\dfrac{AO}{CD}=\dfrac{12}{2}=6$，可得 $CO=5\,BC$，再因 $OC=7\,\text{m}$，故可得知 $BC=\dfrac{7}{5}\,\text{m}$。而牆外陰影部分為如圖所示同心圓的外環部分，可知同心圓內圓半徑為 7 m，外圓半徑則為 $7+\dfrac{7}{5}=\dfrac{42}{5}\,\text{m}$，故陰影部分面積為

$$\frac{22}{7}\times\frac{42}{5}\times\frac{42}{5}-\frac{22}{7}\times7\times7=\frac{1694}{25}=67\frac{19}{25}=67.76\,\text{m}^2。$$

答：$\dfrac{1694}{25}=67\dfrac{19}{25}=67.76\,\text{m}^2$

5. 請問將 12 顆蘋果分給<u>大寶</u>、<u>二寶</u>與<u>小寶</u>，且每人至少分得一顆蘋果的分法共有幾種？

【解 1】

可知將 12 顆蘋果分成三堆共有(10, 1, 1)、(9, 2, 1)、(8, 3, 1)、(8, 2, 2)、(7, 4, 1)、(7, 3, 2)、(6, 5, 1)、(6, 4, 2)、(6, 3, 3)、(5, 5, 2)、(5, 4, 3)、(4, 4, 4)這 12 種方法；

其中若三堆的數目兩兩不同時，每一種分法共有 $3\times2\times1=6$ 種方式分給三人，

而若三堆中有兩堆的數目相同時，每一種分法共有 3 種方式分給三人，

而若三堆的數目都相同時，每一種分法僅有 1 種方式分給三人，

合計共 $6\times7+3\times4+1\times1=55$ 種方法。

【解 2】

可知<u>大寶</u>可分得 1、2、⋯、或 10 顆蘋果。若<u>大寶</u>分得 10 顆蘋果，則<u>二寶</u>僅可分得 1 顆蘋果，<u>小寶</u>可分得 1 顆蘋果；若<u>大寶</u>分得 9 顆蘋果，則<u>二寶</u>可分得 1 或 2 顆蘋果，<u>小寶</u>可分得的數量則已相對應確定；若<u>大寶</u>分得 8 顆蘋果，則<u>二寶</u>可分得 1、2 或 3 顆蘋果，<u>小寶</u>可分得的數量則已相對應確定；⋯，依此類推，故知共有 $1+2+3+\cdots+10=55$ 種方法。

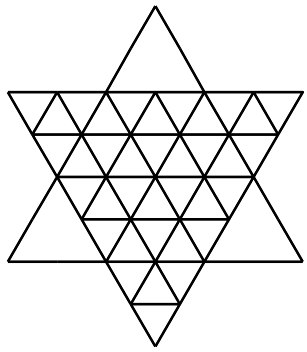
【解 3】

可把 12 顆蘋果排成一列，則蘋果與蘋果之間的空隙共有 11 個。若從這 11 個空隙間任意選出 2 個各放置一根木棍而將這些蘋果依序分成三堆，讓<u>大寶</u>取得第一根木棍以左的所有蘋果、<u>二寶</u>取得兩根木棍之間的所有蘋果、<u>小寶</u>取得第二根木棍以右的所有蘋果，即可得知每一種放置木棍的方法都對應出一種分法。

從 11 個空隙間任意選出 2 個的方法有 $\dfrac{11\times10}{2}=55$ 種，即有 55 種不同的方法。

答：55 種

6. 若下圖中所有的三角形都是正三角形，請問下圖中總共有多少個在不同位置的正三角形？



【解】

不妨令最小的正三角形之邊長為 1。則邊長為 1 的正三角形共有 36 個、邊長為 2 的正三角形共有 24 個、邊長為 3 的正三角形共有 14 個、邊長為 4 的正三角形共有 9 個、邊長為 5 的正三角形共有 3 個、邊長為 6 的正三角形共有 2 個，合計共 $36+24+14+9+3+2=88$ 個正三角形。

答：88 個

7. 遊樂園入場券的編號由 00000 到 99999。如果一張入場券的號碼中有某兩個相鄰的數碼之差恰等於 5，則稱它為幸運券。請問共有多少張幸運券?

【解】

可從計算不是幸運券的張數來反推。設入場券的號碼為 $\overline{abcde}$。對於 a 來說，共有 10 個數碼可以選擇。將 10 個數碼分為 5 對：(0, 5)、(1, 6)、(2, 7)、(3, 8)、(4, 9)，每一對中的兩個數之差為 5，對於不是幸運券而言，一旦選好了 a 之後，b 只有 9 種選法(即不能選與 a 在同一對的另一個數碼)；同理，在選好 b 之後，c 也只有 9 種選法，餘此類推。所以不是幸運券的張數共有 10×9^4，因此幸運券共有 $10^5-10\times 9^4=34390$ 張。

答：34390 張

8. 有 8 枚外觀相同之金幣，可能全都是重量相同的真幣，也有可能恰有一枚假幣，但此枚假幣可能比真幣重，也可能比真幣輕。請問至少要用沒有刻度的兩臂天平秤幾次，才能確定有沒有假幣？若有假幣，還必須要判定此假幣比真幣輕或重。(註：並不要求找出此枚假幣)

【解】

可知若有假幣，秤重一次不可能判定此假幣比真幣輕或重。而利用以下方法最多秤重二次即可判別：第一次秤重時，在天平兩側各放置 4 枚金幣。若平衡，則沒有假幣；若不平衡，則不妨將重的一側上的 4 枚金幣兩兩放置在天平兩側秤第二次，此時若平衡，則假幣比真幣輕，若不平衡，則假幣比真幣重。

答：2 次

9. 小丁每天都以相同的匀速從家裡騎車去學校。某日，當他騎至全程的 $\frac{3}{4}$ 時，車胎破了，剩下的距離他以匀速走路，結果他花了兩倍於平常從家裡騎車到學校的時間。請問小丁騎車的速度是走路速度的幾倍？

【解 1】

為了計算方便，可令家裡到學校的距離為 4，則知當小丁花了兩倍於平常從家裡騎車到學校的時間時，移動的距離為 8，因此從全程的$\frac{3}{4}$開始計時，到平常從家裡騎車到學校的時間的兩倍為止，所移動的距離為$8-3=5$，而他從全程的$\frac{3}{4}$處走到學校所移動的距離為 1。因花費時間相同時，所移動的距離比即為速度比，故知小丁騎車的速度是走路速度的 5 倍。

【解 2】

可知小丁步行全程的$\frac{1}{4}$之路程所需的時間等於自行車騎全程的$2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$之路程所需的時間，故知小丁騎車的速度是走路速度的$\frac{5}{4}\div\frac{1}{4}=5$倍。

答：5 倍

10. 已知鵝蛋每顆 20 元、雞蛋每顆 4 元、鵪鶉蛋每顆 2 元。小華以 400 元買了這三種蛋共 100 顆，每一種蛋都至少買一顆，且其中有二種蛋的數量是相同的。請問小華共買了多少顆雞蛋？

【解 1】

(1) 如果雞蛋與鵪鶉蛋數量相同，則雞蛋與鵪鶉蛋平均一顆$\frac{4+2}{2}=3$元，比一顆鵝蛋少 17 元。若 100 顆全是鵝蛋，則共花了 2000 元，比實際上花了 400 元還多 1600 元，因此雞蛋與鵪鶉蛋共有$\frac{1600}{17}$顆，此不為整數，故不合。

(2) 如果鵝蛋與鵪鶉蛋數量相同，則鵝蛋與鵪鶉蛋平均一顆$\frac{20+2}{2}=11$元，比一顆雞蛋多 7 元。若 100 顆全是雞蛋，則恰花了 400 元，此時鵝蛋與雞蛋共有 0 顆，與每一種蛋都至少買一顆矛盾，故不合。

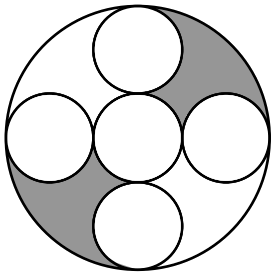
(3) 如果鵝蛋與雞蛋數量相同，則鵝蛋與雞蛋平均一顆$\frac{20+4}{2}=12$元，比一顆鵪鶉蛋多 10 元。若 100 顆全是鵪鶉蛋，則共花了 200 元，比實際上花了 400 元還少 200 元，因此鵝蛋與雞蛋共有$\frac{200}{10}=20$顆，即小華共買了雞蛋$\frac{20}{2}=10$顆。

【解 2】

可知小華買的蛋平均一顆為 4 元，此即恰為雞蛋的價錢。因一顆鵝蛋的價錢比平均價多了 16 元而一顆鵪鶉蛋的價錢比平均價少了 2 元，因此鵪鶉蛋數目必為鵝蛋數目的 8 倍。因此若是雞蛋與鵪鶉蛋的顆數相同，則所購買的蛋的總數必為$1+8+8=17$的倍數，此與題意不合，故可推知必是雞蛋與鵝蛋的顆數相同，且此時所購買的蛋的總數必為$1+1+8=10$的倍數，而 10 恰為 100 的因數，故滿足題意，所以可推知小華買了$100\div10=10$顆雞蛋。

答：10 顆

11. 有五個大小相同的小圓排成一個十字形並放置在一個大圓內，在中央的小圓的圓心與大圓的圓心重合，如圖所示。已知小圓半徑為大圓半徑的$\frac{1}{3}$，且上、下兩個小圓圓心的連線與左、右兩個小圓圓心的連線都通過正中央小圓的圓心且兩線互相垂直。若每一個小圓的面積都是 133 cm^2，請問陰影部分的面積是多少 cm^2？(圓周率取$\frac{22}{7}$)



【解】

可知大圓的半徑為小圓的半徑的 3 倍，故大圓的面積為一個小圓的面積的$3^2=9$倍，而由對稱性可知，大圓與小圓之間的四塊區域面積都相等，且都分別恰等於一個小圓的面積，所以陰影部分的面積為$2\times133=266\ cm^2$。

答：266 cm^2

12. 有 100 名拳擊選手參加比賽，他們的實力各不相同，假設每場比賽都是強者獲勝。比賽採用單淘汰賽，要從中確定出哪一位是實力第一強的選手、哪一位是實力第二強的兩名選手，請問最少需要比賽多少場？

【解】

可知要找出實力最強的一位選手，在採用單淘汰賽時，至少需比賽 99 場。此時因$2^6=64<100<2^7=128$，故經過七輪即選出最強的選手，所以最強的選手只需與 7 位選手交手，而這 7 位選手中除了第一輪與最強的選手交手的人外，另外 6 位選手都必須曾打敗與他們交手的其餘選手。因此實力第二強的選手必在這 7 位選手之中，他們之中最強的即為實力第二強的選手，因此需讓這 7 位選手利用單淘汰賽另外再比 6 場。合計共需要比賽$99+6=105$場。

答：105 場