# 2016 小學數學競賽選拔賽決賽試題

## 第　一　試　應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

**◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分**

1. 已知有五個正整數，第一個數大於第二個數的 2 倍、第二個數大於第三個數的 3 倍、第三個數大於第四個數的 4 倍、第四個數大於第五個數的 5 倍，而第五個數為一個三位數。請問第一個數的最小值是多少？

【參考解法】

可知第五個數的最小值為 100，因此第四個數的最小值為$100\times5+1=501$、第三個數的最小值為$501\times4+1=2005$、第二個數的最小值為$2005\times3+1=6016$、第一個數的最小值為$6016\times2+1=12033$。

答：12033

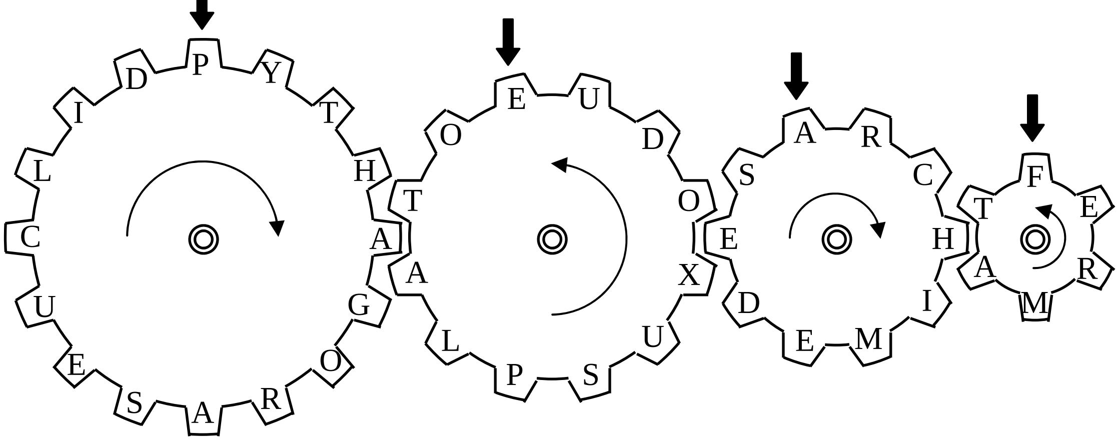
2. 在 50 張紙牌上不重複地分別寫上從 2 開始的連續偶數：2、4、6、8、10、…、100，每張恰填一個數。若從中抽出若干張卡片使得剩下的卡片上的數之總和恰好等於 2016，請問最多可抽出幾張卡片？

【參考解法】

可知從 2 開始的連續 50 個偶數之和為$\dfrac{(2+100)\times50}{2}=2550$，故抽出的卡片上的數之和為$2550-2016=534$。要使抽出的卡片張數最多，我們要抽出卡片上的數儘量小，所以可抽走 2、4、6、8、…、40、42 與 72，共 22 張卡片。而若至少抽走 23 張卡片，則剩下卡片上的數之總和至多為$100+98+96+\cdots+50+48=\dfrac{27\times(100+48)}{2}=1998$，即不可能恰等於 2016。因此知最多可抽出 22 張。

答：22 張

3. 四個互相嵌合的齒輪，其中最大的齒輪通過順時針旋轉可帶動其它三個齒輪一起轉動，各個齒輪的齒數由大至小依序為 16、12、10、6，如圖所示。當最大的齒輪按照順時針方向旋轉恰好 11 圈時，請問各個齒輪上面黑色粗箭頭所指處的四個字母由左至右分別是什麼？



【參考解法】

可知最大的齒輪依順時針方向恰轉 11 圈時，共轉了$16\times11=176$齒，且其上面的黑色粗箭頭仍指向 P。而$176=12\times14+8=10\times17+6=6\times29+2$，故可判斷出第二大的齒輪以逆時針方向轉了 14 圈又 8 齒、第三大的齒輪以順時針方向轉了 17 圈又 6 齒、最小的齒輪以逆時針方向轉了 29 圈又 2 齒，即可得知第二大的齒輪上面的黑色粗箭頭指向 L、第三大的齒輪上面的黑色粗箭頭指向 I、最小的齒輪上面的黑色粗箭頭指向 R。 答：P、L、I、R

4. 伯父跟爸爸今年的年齡都是二位數，且伯父年齡的二位數碼恰好與爸爸年齡的二位數碼順序相反。若伯父比爸爸大的歲數恰好等於他們兩人年齡之和的十一分之一，請問伯父今年為幾歲？

【參考解法 1】

若令伯父今年為$\overline{ab}=10a+b$歲，則爸爸今年為$\overline{ba}=10b+a$歲，則由題意可以得知$\overline{ab}-\overline{ba}=\frac{1}{11}(\overline{ab}+\overline{ba})$，故得$(10a+b)-(10b+a)=\frac{1}{11}(10a+b+10b+a)$，化簡得$9a-9b=a+b$，此即$4a=5b$。因 4 與 5 互質，且 $a$、$b$ 都是數碼，故可判斷出$a=5$、$b=4$，即伯父今年為 54 歲、爸爸今年為 45 歲。

【參考解法 2】

二位數碼與數碼順序相反的二位數之差為 9 的倍數，它又恰好等於年齡之和的十一分之一，故他們的年齡之和為 99 的倍數，接著再由兩個二位數之和必小於 200 可判斷出伯父跟爸爸的年齡之和為 198 或 99：

(i) 若伯父跟爸爸的年齡之和為 198，則他們今年的年齡之差為$198\div11=18$，即伯父今年的年齡為$\frac{198+18}{2}=108$歲，矛盾；

(ii) 若伯父跟爸爸的年齡之和為 99，則他們今年的年齡之差為$99\div11=9$，即伯父今年的年齡為$\frac{99+9}{2}=54$歲、爸爸今年的年齡為$\frac{99-9}{2}=45$歲。

答：54 歲

5. 在以下數列中，請問從第幾項開始，每一項的數與 1 之差都小於$\frac{1}{2016}$？

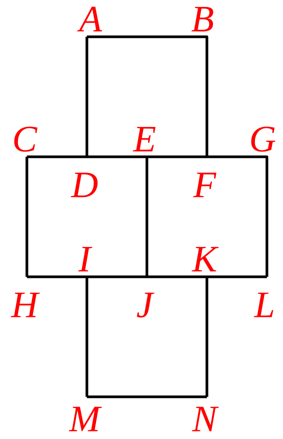
$$\frac{1}{3}、\frac{3}{5}、\frac{5}{7}、\frac{7}{9}、\frac{9}{11}、\cdots$$

【參考解法】

可觀察出第 $n$ 項的數為$\frac{2n-1}{2n+1}$，故此即為求出滿足$1-\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}<\frac{1}{2016}$的正整數 $n$ 之最小值。由$\frac{2}{2n+1}<\frac{1\times2}{2016\times2}$可推得$2n+1>4032$，即$n\geq2016$，故知從第 2016 項$\frac{2\times2016-1}{2\times2016+1}=\frac{4031}{4033}$開始，每一項的數與 1 之差都小於$\frac{1}{2016}$。

答：2016

6. 用邊長為 1 cm 的四個正方形拼成一個左右對稱的圖形，如圖所示。連接這四個正方形的 14 個頂點可以得到許多不同的三角形。在這些三角形中，請問至少有一條邊是水平線或鉛垂線且面積為 1 $\text{cm}^2$ 的三角形共有多少個？




【參考解法】

令這 14 個頂點為點 $A$～$N$，如圖所示，可知在同一條水平線的頂點間的距離可能為 $\frac{1}{2}$ cm、1 cm、$\frac{3}{2}$ cm 或 2 cm、在同一條鉛垂線的頂點間的距離可能為 1 cm、2 cm 或 3 cm。

(i) 若有一條邊為水平線：

(a) 此水平邊長為 $\frac{1}{2}$ cm 時，高為 $1\times2\div\frac{1}{2}=4$ cm 才能使面積為 1 $\text{cm}^2$，但圖中不存在距離為 4 cm 的兩點，故不合；

(b) 此水平邊長為 1 cm 時，高為 $1\times2\div1=2$ cm 才能使面積為 1 $\text{cm}^2$：
若此水平邊為 $AB$，則第三個頂點可為點 $H$、$I$、$J$、$K$、$L$，共有 5 種可能；同樣地，若此水平邊為 $MN$，也是有 5 種可能；
若此水平邊為 $CE$、$DF$、$EG$，則第三個頂點可為點 $M$、$N$，各有 2 種可能；同樣地，若此水平邊為 $HJ$、$IK$ 或 $JL$，也是各有 2 種可能；

(c) 此水平邊長為 $\frac{3}{2}$ cm 時，高為 $1\times2\div\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$ cm 才能使面積為 1 $\text{cm}^2$，不存在此距離的兩點，故不合；

(d) 此水平邊長為 2 cm 時，高為 $1\times2\div2=1$ cm 才能使面積為 1 $\text{cm}^2$：
若此水平邊為 $CG$，則第三個頂點可為點 $A$、$B$、$H$、$I$、$J$、$K$、$L$，共有 7 種可能；同樣地，若此水平邊為 $HL$，也是有 7 種可能；

故知此情況共有 $5\times2+2\times3\times2+7\times2=36$ 個三角形；

(ii) 若有一條邊為鉛垂線且沒有邊為水平線：

(a) 此鉛垂邊長為 1 cm 時，高為 $1\times2\div1=2$ cm 才能使面積為 1 $\text{cm}^2$，但可發現此時此鉛垂邊只可能為 $CH$ 或 $GL$，而無論為那一種情況，都至少有一條邊為水平線，故不合；

(b) 此鉛垂邊長為 2 cm 時，高為 $1\times2\div2=1$ cm 才能使面積為 1 $\text{cm}^2$；
若此鉛垂邊為 $AI$，則第三個頂點可為點 $F$、$N$，共有 2 種可能；同樣地，若此鉛垂邊為 $DM$、$BK$ 或 $FN$，也是各有 2 種可能；

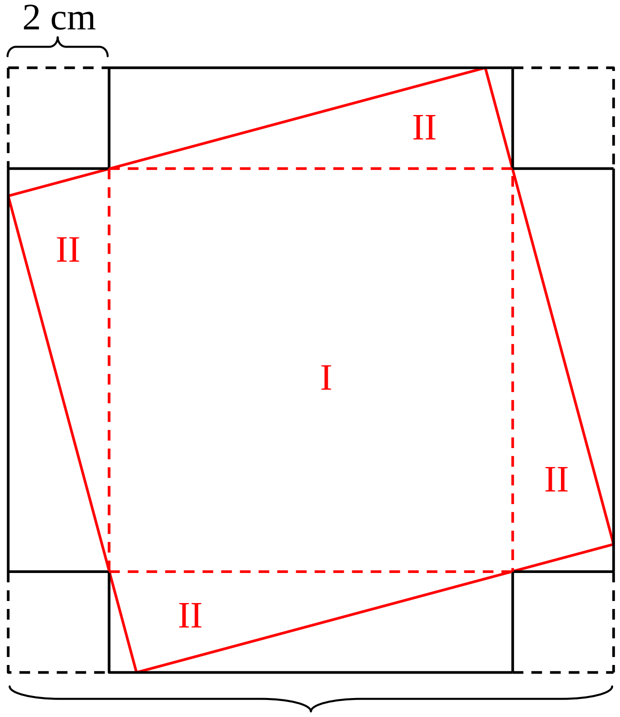
(c) 此鉛垂邊長為 3 cm 時，高為 $1\times2\div3=\frac{2}{3}$ cm 才能使面積為 1 $\text{cm}^2$，不存在此距離的兩點，故不合；

故知此情況共有 $2\times4=8$ 個三角形；

所以合計有 $36+8=44$ 個三角形面積為 1 $\text{cm}^2$ 且至少有一條邊是水平或鉛垂線。

答：44 個

7. 將一張邊長為 12 cm 的正方形紙片的四個角落都截去一個邊長為 2 cm 的小正方形，如圖所示。如果要從剩下的紙片中剪出一塊完整的正方形，請問這一塊正方形的面積最大為多少 $cm^2$？

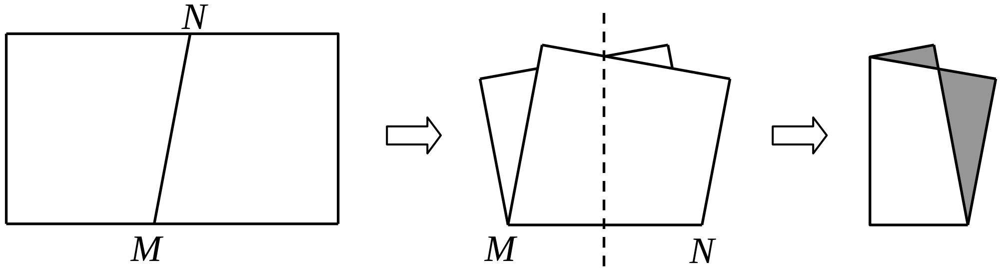



【參考解法】

可判斷出可截出面積最大的正方形如圖中紅實線所圍出的正方形，若再如圖連接紅色虛線，則此正方形的面積等於一塊正方形區域 I 與四塊三角形區域 II 的面積和。因正方形區域 I 的邊長為 $12-2-2=8$ cm，而三角形區域 II 的面積即為長 8 cm、寬 2 cm 的矩形面積一半，因此所求的面積為 $8\times8+4\times\frac{1}{2}\times8\times2=96$ $cm^2$。

答：96 $cm^2$

8. 線 $MN$ 將長方形紙片分割為面積相等的兩部分，如圖(1)。沿 $MN$ 將這張長方形紙片對摺後，得到圖(2)，再將此圖沿對稱軸對摺後，得到圖(3)。已知圖(3)的整個面積佔原長方形面積的 $\frac{3}{10}$，而陰影部分的面積為 16 $cm^2$，請問原長方形的面積為多少 $cm^2$？

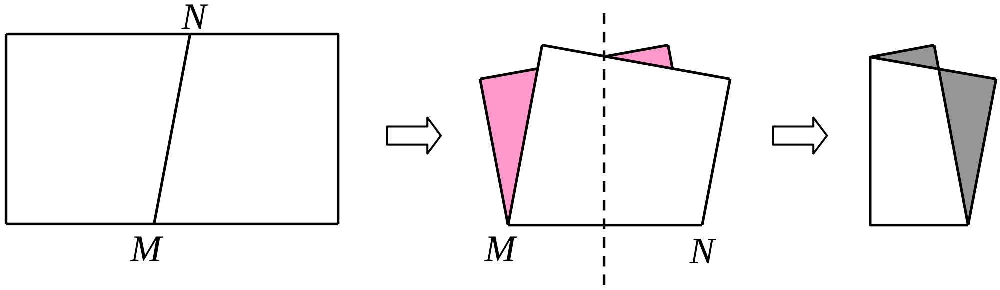



圖(1)　　圖(2)　　圖(3)

【參考解法 1】

可知在圖(2)中，陰影部分共有二層而空白區域共有四層，因此如果將陰影部分縮小一半使其面積成為 8 cm$^2$，則可將此時的陰影部分看成四層，即可判斷出此時的圖形面積為原長方形面積的$\frac{1}{4}$，所佔的比例較原圖形減少$\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$，也就是說，減少的 8 cm$^2$ 佔原長方形面積的$\frac{1}{20}$，故原長方形面積為$8\div\frac{1}{20}=160$ cm$^2$。

【參考解法 2】




圖(1)　　圖(2)　　圖(3)

由圖(3)的整個面積佔原長方形面積的$\frac{3}{10}$可判斷出圖(2)的面積佔長方形面積的$\frac{3}{10}\times 2=\frac{6}{10}$，而因 $MN$ 將原長方形分成面積相等的兩部分，因此知圖(2)陰影部分佔原長方形面積的$\frac{6}{10}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$，且可知圖(3)的陰影部分即為圖(2)的陰影部分，即陰影部分的面積也是 16 cm$^2$，故原長方形面積為$16\div\frac{1}{10}=160$ cm$^2$。

答：160 cm$^2$

9. 有十二位小孩圍成圓圈以順時針方向依序編號為 1、2、…、12，他們玩扔球遊戲，開始時球在 1 號小孩手上，他可以跳過 0 位小孩傳給 2 號、或是跳過 1 位小孩傳給 3 號、…、或是跳過 10 位小孩傳給 12 號的方式扔球，而接到球的小孩以前一次相同的扔球間隔繼續扔球。請問 1 號有多少種不同的扔球方式，使得依此方式繼續扔球，可以使得每位小孩都會至少接到一次球？

【參考解法 1】

若每次都跳過 0 位小孩，則傳球的順序為 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12，接著再回傳給 1 號，因此這種方式可以使每位小孩都接到一次球；

若每次都跳過 1 位小孩，則傳球的順序為 1、3、5、7、9、11，接著再回傳給 1 號，因此這種方式無法使每位小孩都接到一次球；

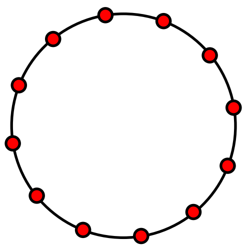
若每次都跳過 2 位小孩，則傳球的順序為 1、4、7、10，接著再回傳給 1 號，因此這種方式無法使每位小孩都接到一次球；

若每次都跳過 3 位小孩，則傳球的順序為 1、5、9，接著再回傳給 1 號，因此這種方式無法使每位小孩都接到一次球；

若每次都跳過 4 位小孩，則傳球的順序為 1、6、11、4、9、2、7、12、5、10、

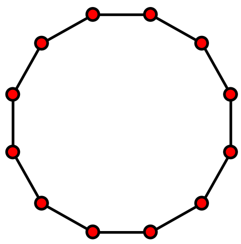
3、8，接著再回傳給 1 號，因此這種方式可以使每位小孩都接到一次球；
若每次都跳過 5 位小孩，則傳球的順序為 1、7，接著再回傳給 1 號，因此這種方式無法使每位小孩都接到一次球；
若每次都跳過 6 位小孩，則傳球的順序為 1、8、3、10、5、12、7、2、9、4、11、6，接著再回傳給 1 號，因此這種方式可以使每位小孩都接到一次球；
若每次都跳過 7 位小孩，則傳球的順序為 1、9、5，接著再回傳給 1 號，因此這種方式無法使每位小孩都接到一次球；
若每次都跳過 8 位小孩，則傳球的順序為 1、10、7、4，接著再回傳給 1 號，因此這種方式無法使每位小孩都接到一次球；
若每次都跳過 9 位小孩，則傳球的順序為 1、11、9、7、5、3，接著再回傳給 1 號，因此這種方式無法使每位小孩都接到一次球；
若每次都跳過 10 位小孩，則傳球的順序為 1、12、11、10、9、8、7、6、5、4、3、2，接著再回傳給 1 號，因此這種方式可以使每位小孩都接到一次球。
故知共有 4 種方式可使每位小孩都會至少接到一次球。

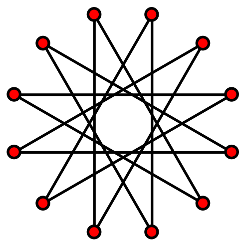
【參考解法 2】



將 12 位小孩子圍成一圈，如右圖所示。可看出跳過 0 位小孩傳球，即為每隔 1 個間格傳球、跳過 1 位小孩傳球，即為每隔 2 個間格傳球、跳過 2 位小孩傳球，即為每隔 3 個間格傳球、…、跳過 10 位小孩傳球，即為每隔 11 個間格傳球。此時可看出若是每隔與 12 有除了 1 以外的公因數的格數傳球，在每個人都傳到球 1 次之前，就會回到 1 號小孩位置，即不可能每個都傳到球。因此必須隔與 12 的最大公因數為 1 的格數傳球。因在小於 12 的數中，與 12 的最大公因數為 1 數為 1、5、7、11 這 4 個數，故知共有 4 種方式可使每位小孩都會至少接到一次球，這 4 種方式為跳過$1-1=0$個、$5-1=4$個、$7-1=6$個與$11-1=10$個小孩傳球。

【參考解法 3】
可判斷出滿足題意的扔球方式，即為找出恰經過圓周上 12 個點各一次且最後回到原出發點的路徑。而這樣的路徑共有以下 2 條，而每一條路徑中，每一條線段的兩個端點 $A$、$B$ 皆可視為 $A$ 扔球給 $B$ 或 $B$ 扔球給 $A$，但一旦其中一條線段的扔球方向決定了，則整條路徑的扔球方向也隨之決定，因此都每一條路徑各代表 2 種扔球方式，所以共有$2\times2=4$種方式可使每位小孩都會至少接到一次球。





答：4 種

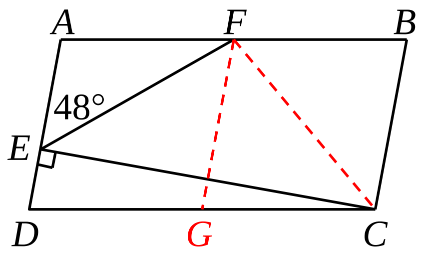
10.小明在黑板上寫了幾個互不相同的正整數，然後計算出它們的和並將此和除以它們的乘積，算出所得的商。接著，他擦去黑板上最小的一個數，又重新計算出剩下的數之和並將此和除以剩下的數之乘積，算出所得的商。若知第二個商是第一個商的 3 倍。請問小明擦去的數是什麼數？

【參考解法】

設擦去的數為 $a$，剩下的數之和為 $S$，剩下的數之積為 $P$，則由題意知第一次計算出的商為 $\dfrac{a+S}{aP}$、第二次計算出的商為 $\dfrac{S}{P}$，故可得 $3\times\dfrac{a+S}{aP}=\dfrac{S}{P}$，等號兩邊同時乘以 $\dfrac{P}{3S}$ 此即為 $\dfrac{1}{S}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{3}$。因 $a<S$，故知 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{6}$，即 $a=4$ 或 $5$。但當 $a=5$ 時，$S=\dfrac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}=\dfrac{15}{2}$，不合，因此 $a=4$，此時 $S=\dfrac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=12$，而小明開始時所寫的數可為 4、5、7。

答：4

11.在平行四邊形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，若點 $F$ 為 $AB$ 中點、點 $E$ 在 $AD$ 上使得 $CE\perp AD$ 且 $\angle AEF=48°$，如圖所示。請問 $\angle BFE$ 為多少度？




【參考解法】

取 $CD$ 的中點 $G$ 並連接 $FG$、$FC$，如圖所示。可知 $FG // AD$，因此 $\angle EFG=\angle AEF=48°$ 且由 $CE\perp AD$ 可知 $FG\perp CE$；此時也可判斷出 $FBCG$ 為菱形，故 $\angle CFG=\angle CFB$。再因 $G$ 為 $CD$ 中點且 $FG // AD$，故 $GF$ 平分 $CE$，因此 $GF$ 為 $CE$ 的中垂線，即可得知 $\angle CFG=\angle EFG=48°$，所以 $\angle BFE=\angle EFG+\angle CFG+\angle CFB=48°+48°+48°=144°$。

答：144°

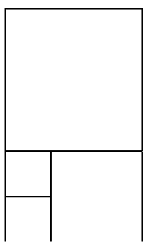
12.邊長分別為 3 cm、2 cm 與 1 cm 的正方形的紙片各有很多張。利用這些紙片不重疊地拼成一個長 3 cm、寬 5 cm 的長方形，請問共有多少種不同的拼法？(一種拼法經過翻轉或旋轉後若與另一種拼法相同，則視為相同的拼法)

【參考解法】

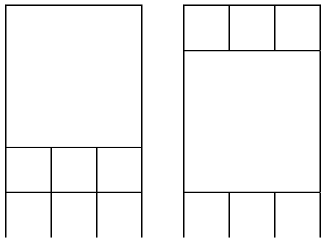
可判斷出至多只能使用 1 張邊長為 3 cm 的正方形紙片。故知：

若使用 1 張邊長為 3 cm 的正方形紙片時，仍可判斷出至多可使用 1 張邊長為 2 cm 的正方形紙片：

(i) 恰使用 1 張邊長為 2 cm 的正方形紙片時，需使用 $15-9-4=2$ 張邊長為 1 cm 的正方形紙片，共有 1 種拼法(因為其它的拼法經過翻轉或旋轉後與此拼法相同)，如右圖所示；

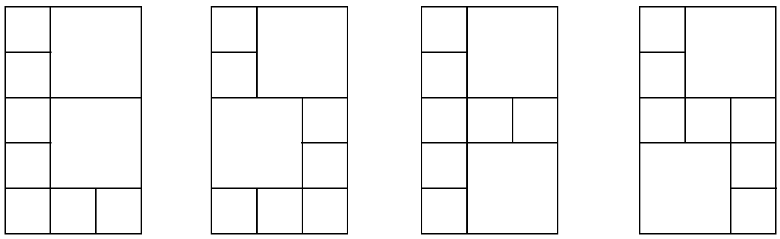


(ii)　沒有使用邊長為 2 cm 的正方形紙片時，則必需使用 $15-9=6$ 張邊長為 1 cm 的正方形紙片，共有 2 種拼法，如右圖所示；

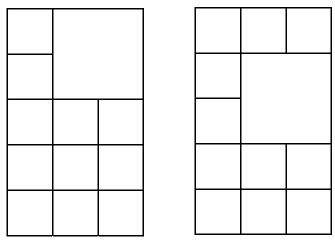


若未使用邊長為 3 cm 的正方形紙片時，仍可判斷出至多可使用 2 張邊長為 2 cm 的正方形紙片：

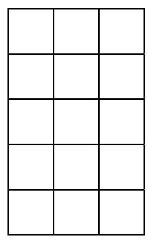
(i)　恰使用 2 張邊長為 2 cm 的正方形紙片時，必需使用 $15-2\times4=7$ 張邊長為 1 cm 的正方形紙片，共有 4 種拼法(因為其它的拼法經過翻轉或旋轉後與此拼法相同)，如下圖所示；



(ii)　恰使用 1 張邊長為 2 cm 的正方形紙片時，需使用 $15-4=11$ 張邊長為 1 cm 的正方形紙片，共有 2 種拼法(因為其它的拼法經過翻轉或旋轉後與此拼法相同)，如右圖所示；



(iii)　未使用邊長為 2 cm 的正方形紙片時，需使用 15 張邊長為 1 cm 的正方形紙片，共有 1 種拼法，如右圖所示；



故知合計共有 $1+2+4+2+1=10$ 種不同的拼法。

答：10 種

# 2016 小學數學競賽選拔賽決賽試題解答

## 第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

**請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第一題都必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。**

1. 請問是否存在 2016 個整數，使得它們的和與乘積都等於 2016？若存在，請找出一組滿足題意的數；若不存在，請解釋您的理由。

【參考解法】

因這 2016 個數之乘積為 2016，故可判斷出這些數中不可能有 0；

由 $2016=2^5\times 3^2\times 7$ 可知它共有 $6\times 3\times 2=36$ 個因數。若這 2016 個數全部都是正整數，則它們最小的和為 $2+2+2+2+2+3+3+7+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{2008個1}=2031$，不可能為 2016，故這 2016 個數中必有一些數為負數(2 分)，且負數的個數必須是偶數個。(2 分)

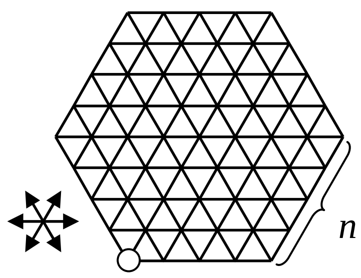
若 2、2、2、2、2、3、3、7 這 8 個數全為正數，其和為 23，其餘 2008 個數為 1 或 –1，但每多一個數為 –1，其和必減少 2，(1 分)故知這八個數的和必為偶數，全部 2016 個數之和必為奇數，故不合。因此不是 1 或 –1 的數之個數為奇數個並且 1 或 –1 的數之個數也為奇數個，或不是 1 或 –1 的數之個數為偶數個並且 1 或 –1 的數之個數也為偶數個。(沒有給出例子但有以上論述最多給 10 分)

取法很多，以下為其中幾種取法的例子：

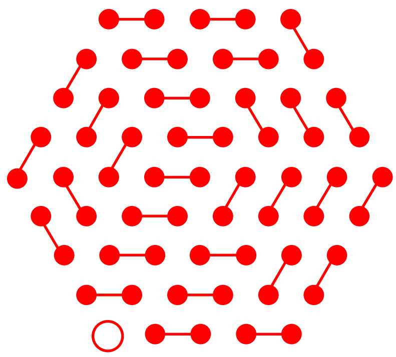
(i) 1510 個 1、504 個 –1、2、1008
(ii) 1846 個 1、167 個 –1、–2、3、336
(iii) 1887 個 1、125 個 –1、–2、2、2、252
(iv) 1967 個 1、44 個 –1、2、2、2、3、84
(v) 2001 個 1、9 個 –1、–2、2、2、3、7、12
(vi) 2001 個 1、8 個 –1、2、2、2、3、3、4、7

- 給出任一個正確例子，25 分
- 回答存在，且所給出的例子之個數、和與乘積中僅有二個數值為 2016，10 分
- 回答存在，且所給出的例子之個數、和與乘積中僅有一個數值為 2016，4 分

2. 邊長為 $n$ 的正六邊形被劃分為許多正三角形，在左下角的結點上放一枚棋子，如右圖所示。小華與小強兩人輪流移動棋子，每人每次將棋子移動一步，但必須移到棋子都不曾到過的相鄰結點上，無法再繼續移動棋子者輸。如果由小華先開始，請問誰有必勝的策略？策略為何？(沒有說明策略得 0 分)



【參考解法】



小強有必勝策略，他可將除了原來放有棋子的點以外的60個結點兩兩配對連一條線段，使得這些線段由左下角出發成螺旋狀，如圖所示為其中一種配對方式。(給 15 分)

對於小華所走的每一步，小強都可以把棋子走到與小華的落點同一線段的另一端點上。於是只要小華能夠移動，小強就必能再移動，而小華最後會先陷入無法再移動的局面。(給 10 分)

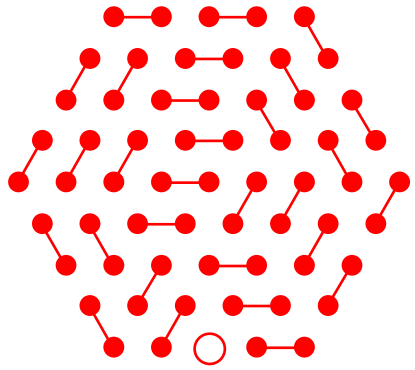
答：小強有必勝策略

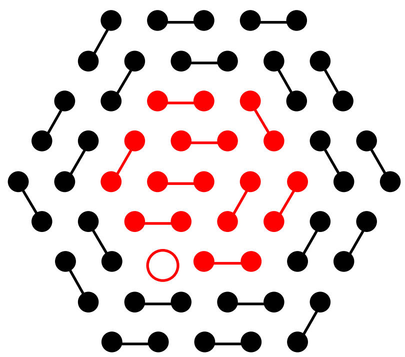
- 若考慮除結點外共有偶數個點，且小強為後手，據此推論出小強必勝，10 分。

【評註】

事實上，無論原來的棋子放在此正六邊形的任何結點上，小強都有必勝策略。

若開始時，棋子放在正六邊形邊緣的一個結點上，我們將邊緣上的其餘結點依次兩兩配對連一條線段，只剩下一個與棋子最初所在位置相鄰的結點。繼續使得這些線段由此結點出發成螺旋狀，如下左圖。小強依照前述同樣的策略即可必勝。



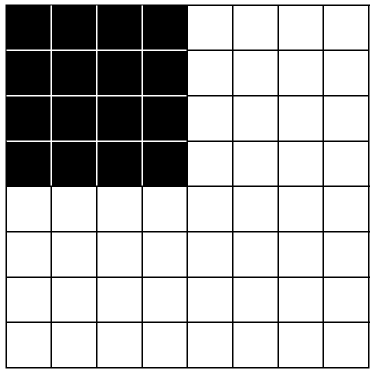


若開始時，棋子放在正六邊形內部的一個結點上，則在此結點外圍的每一圈上的結點數量都是偶數，可以兩兩配對連一條線段。接著把棋子所在最初位置以內的結點用前述的方法，由此結點出發畫螺旋狀即可，如上右圖。小強仍然可依照前述的策略得到勝利。

我們畫圈或畫螺旋狀將結點兩兩配對連一條線段，這樣比較有規律，其實任何兩兩配對連一條線段可將其餘 60 個結點都用上的方法都具有相同的結果。

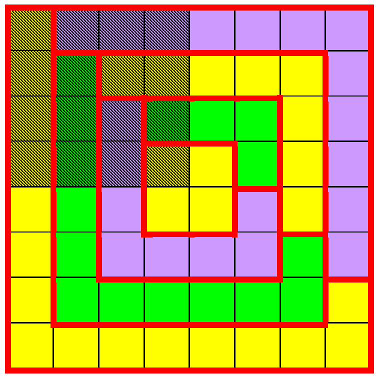
所以無論如何，小強都有必勝策略。

3. 有個$8\times8$的方格表，它左上角的$4\times4$方格表被塗上黑色，其它的小方格則塗上白色。沿著格線將方格表切割為數片連在一起的多方塊，使得每片多方塊內塗上黑色小方格數量與塗上白色小方格數量之比為 1：3。請問最多可以切出幾片多方塊？(您必須證明不能再多並且給出切法)



【參考解法】

可知與白色小方格相鄰的黑色小方格共有 7 個，而每一片多方塊都至少有 1 個黑色小方格與白色小方格相鄰，故最多可有 7 片多方塊。(給 10 分)可用如圖方式切成 7 片，其中 2 片為形狀不同的四方塊、2 片為形狀不同的八方塊、2 片為形狀不同的十二方塊、1 片為十六方塊：(給 15 分)



答：7 片

- 只回答 7 片，但無理由或理由錯誤，4 分；
- 回答其餘片數，不給分

4. 黑板上有 10 個介於 0 與 1 之間的小數，它們的小數點後至多有一位數。每次操作從中挑選二個數擦掉，並將這二個數的和四捨五入成為整數後寫在黑板上(整數與整數相加則不進行四捨五入)，因此知每次操作後黑板都會少一個數。繼續上述的操作，直到黑板只剩下一個數為止。請問最後這個數最多有多少個不同可能的值？您必須給出一個例子說明最多可以達成您所宣稱的不同可能的值。

【參考解法】

定義 $a\oplus b=c$ 為從黑板上選出 $a$、$b$ 後，計算其和再作四捨五入成為整數後得到的值 $c$。由四捨五入的規則可知：

(i) 若 $M$、$N$ 都是整數，則 $M\oplus N=M+N$

(ii) 若 $M$ 為整數，則 (1) 當 $0.5\le a\le 0.9$ 時，$M\oplus a=M+1$

(2) 當 $0.1\le a\le 0.4$ 時，$M\oplus a=M$

(iii) 若 $0.1\le b\le a\le 0.9$，則 (1) 當 $a+b\ge 1.5$ 時，$a\oplus b=2$

(2) 當 $0.5\le a+b\le 1.4$ 時，$a\oplus b=1$

(3) 當 $a+b\le 0.4$ 時，$a\oplus b=0$ (給 5 分)

設這 10 個數中有 $k$ 個數大於或等於 0.5、$10-k$ 個數小於 0.5，其中 $0\le k\le 10$。當 $k$ 為偶數時，要得到所有情況中的最大值，一定是 $10-k$ 個小於 0.5 的數經過操作後都可進位得到一個整數，再逐一與 $k$ 個大於或等於 0.5 的數操作。此可透過將這 $10-k$ 個小於 0.5 的數兩兩配對，經過操作後可得 $\frac{10-k}{2}=5-\frac{k}{2}$，再逐一與 $k$ 個大於或等於 0.5 的數操作後即可得 $5-\frac{k}{2}+k=5+\frac{k}{2}$；而最小值一定是發生在將這 $k$ 個大於或等於 0.5 的數兩兩配對，且僅有(iii)-(2)的情況發生時，此時經

過操作後可得$\frac{k}{2}$，再逐一與$10-k$個小於 0.5 的數操作後即可得$\frac{k}{2}$，故可能的取值至多有$5+\frac{k}{2}-\frac{k}{2}+1=6$個。若有(iii)-(1)的情況發生，則最小值會變大，但最大值不會改變，即可能的取值會少於 6 個。(給 5 分)

當 $k$ 為奇數時，要得到所有情況中的最大值，一定是$10-k-1$個小於 0.5 的數經過操作後都可進位得到一個整數，再逐一與另一個小於 0.5 的數、$k$ 個大於或等於 0.5 的數操作。此可透過將這$10-k-1$個小於 0.5 的數兩兩配對，經過操作後可得$\frac{10-k-1}{2}=5-\frac{(k+1)}{2}$，再逐一與另一個小於 0.5 的數、$k$ 個大於或等於 0.5 的數操作後即可得$5-\frac{(k+1)}{2}+k=5+\frac{(k-1)}{2}$；而最小值一定是發生在將$k-1$個大於或等於 0.5 的數兩兩配對，且僅有(iii)-(2)的情況發生時，此時經過操作後可得$\frac{k-1}{2}$，再逐一與另一個大於或等於 0.5 的數、$10-k$個小於 0.5 的數操作後即可得$\frac{k-1}{2}+1=\frac{k+1}{2}$，故可能的取值共有$5+\frac{k-1}{2}-\frac{k+1}{2}+1=5$個。若有(iii)-(1)的情況發生，則最小值會變大，但最大值不會改變，即可能的取值會少於 5 個。(給 5 分)故綜上分析可知至多可取得 6 個不同值。

以下為一種得到 6 個不同值的方法：令黑板上的 10 個數為 2 個 0.4 與 8 個 0.5，(給 5 分)且黑板最後剩下的數為 $S$，則：

(i) $0.5\oplus0.5=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$1\oplus1=2$、$2\oplus1=3$、$3\oplus1=4$、$4\oplus0.4=4$、$4\oplus0.4=4$，故知$S=4$；

(ii) $0.4\oplus0.4=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$1\oplus1=2$、$2\oplus1=3$、$3\oplus1=4$、$4\oplus1=5$，故知$S=5$；

(iii) $0.4\oplus0.4=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$1\oplus1=2$、$2\oplus1=3$、$3\oplus1=4$、$4\oplus0.5=5$、$5\oplus0.5=6$，故知$S=6$；

(iv) $0.4\oplus0.4=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$1\oplus1=2$、$2\oplus1=3$、$3\oplus0.5=4$、$4\oplus0.5=5$、$5\oplus0.5=6$、$6\oplus0.5=7$，故知$S=7$；

(v) $0.4\oplus0.4=1$、$0.5\oplus0.5=1$、$1\oplus1=2$、$2\oplus0.5=3$、$3\oplus0.5=4$、$4\oplus0.5=5$、$5\oplus0.5=6$、$6\oplus0.5=7$、$7\oplus0.5=8$，故知$S=8$；

(vi) $0.4\oplus0.4=1$、$1\oplus0.5=2$、$2\oplus0.5=3$、$3\oplus0.5=4$、$4\oplus0.5=5$、$5\oplus0.5=6$、$6\oplus0.5=7$、$7\oplus0.5=8$、$8\oplus0.5=9$，故知$S=9$。

故知 $S$ 的可能值為 4、5、6、7、8、9，即共可得到 6 個不同值。(給 5 分)

答：6 個值

- 給出會得到 5 個不同值的十個數字，3 分；計算出這 5 個不同值，3 分
- 給出會得到 4 個不同值的十個數字，2 分；計算出這 4 個不同值，2 分
- 所給出的例子能得到最多的不同值與回答的數目不同，扣 1 分，扣至 0 分為止。
- 所給出的數字中有 0，不給分
- 其餘不給分