

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2017 小學數學競賽選拔賽初賽試題

第二試：應用題（考試時間 90 分鐘）

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。
本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分

1. 某旅館服務生把四間客房的鑰匙隨意分給住在這四間客房的旅客，其中恰好有 2 人能打開自己的房門。請問這四名旅客拿到的鑰匙共有多少種不同可能的情況？

【參考解法】

從四名旅客中選出兩個能打開自己房門的旅客，有 $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ 種情況。根據題意，另兩名旅客只能是互相拿了對方的鑰匙，僅 1 種情況。所以這四名旅客拿到的鑰匙共有 $6 \times 1 = 6$ 種不同可能的情況。

答：6 種

2. 請問 $3^4 \times 5^6 \times 7^{10}$ 有多少個因數與 15 互質？

【參考解法】

$3^4 \times 5^6 \times 7^{10}$ 與 15 互質的因數只能是質因數分解式之形式為 7^i 的數，其中 $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ ，故共有 11 個數。

答：11 個

3. 教師與學生共 20 人前往博物館參觀，已知每張門票票價為 200 元，而教師可獲減價 10% 的優惠、學生可獲減價 50% 的優惠。若全部支付的門票總費用為 2640 元，請問其中總共有多少位教師？

【參考解法 1】

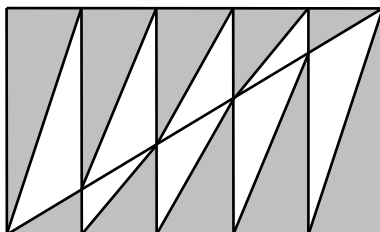
可知每張教師門票為 $200 \times 90\% = 180$ 元、每張學生門票為 $200 \times 50\% = 100$ 元，即每張學生門票比每張老師門票便宜 $180 - 100 = 80$ 元。若全部都是學生，則總費用應為 $20 \times 100 = 2000$ 元，比實際支付的費用少 $2640 - 2000 = 640$ 元，故可得知其中總共有 $640 \div 80 = 8$ 位老師。

【參考解法 2】

可知每張教師門票為 $200 \times 90\% = 180$ 元、每張學生門票為 $200 \times 50\% = 100$ 元。設教師有 x 位，則學生有 $20 - x$ 位，故得 $180x + 100(20 - x) = 2640$ ，解得 $x = 8$ 。

答：8 位

4. 將一個 $10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ 的矩形分割為五個 $2 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ 的小矩形，畫出大矩形的對角線，並將其內部若干個三角形塗上陰影，如下圖所示。請問圖中陰影部分的總面積比白色部分的總面積大多少 cm^2 ？

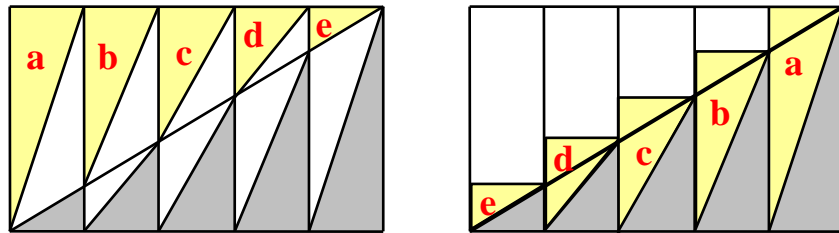


【參考解法 1】

所有塗上陰影三角形恰被矩形的一條對角線分成全等的兩部分，其面積總和相等。現只關注對角線下方的五個塗上陰影三角形，可知這五個三角形的底邊都相等，都等於 2 cm。而其高之比由左至右分別為 1 : 2 : 3 : 4 : 5，其長度分別等於 1.2 cm、2.4 cm、3.6 cm、4.8 cm、6 cm。因此知五個塗上陰影三角形的面積之和為 $\frac{1}{2} \times (1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 6) \times 2 = 18 \text{ cm}^2$ ，即長方形內所有塗上陰影三角形面積之和為 36 cm^2 ，故白色部分的總面積為 $6 \times 10 - 36 = 24 \text{ cm}^2$ ，即可得知陰影部分的總面積比白色部分的總面積大 $36 - 24 = 12 \text{ cm}^2$ 。

【參考解法 2】

將在矩形內塗上陰影的三角形移動合併在一起，可得如下右圖的情況：



易知塗上陰影部分的總面積與白色部分的總面積之差等於右側的小矩形，即陰影部分的總面積比白色部分的總面積大 $2 \times 6 = 12 \text{ cm}^2$ 。

答： 12 cm^2

5. 用 2、0、1、7 這四個數碼各一個排成被 11 除餘 4 的四位數，請問這樣的四位數共有多少個？

【參考解法 1】

要求被 11 除餘 4，可以這樣考慮：這樣的數減去 4 後，就能被 11 整除。所以得到一個「被 11 除餘 4」的判定法則：將偶數位數碼相加得到一個和數、將奇數位數碼相加後再減去 4 而得另一個和數，如果這兩個和數的大數減去小數之差能被 11 整除，則這個數是被 11 除餘 4 的數，若否就不是。把 2、0、1、7 排成一個被 11 除餘 4 的四位數，可以把這 4 個數碼分成兩組，每組 2 個數碼，其中一組作為千位數碼與十位數碼，並將它們的和記作 A；另外一組作為百位數碼與個位數碼，並將它們之和減去 4 記作 B。可知分組情況有：

	千位數碼與十位數碼	A	百位數碼與個位數碼	B	大數減去小數
(1)	7、2	7+2	1、0	1+0-4	1
(2)	7、1	7+1	2、0	2+0-4	1
(3)	7、0	7+0	2、1	2+1-4	8
(4)	2、1	2+1	7、0	7+0-4	0 或 11
(5)	2、0	2+0	7、1	7+1-4	2
(6)	1、0	1+0	7、2	7+2-4	4

可發現僅有第(4)種滿足要求。所以，這樣的四位數是 1027、1720、2017、2710，共有 4 個。

【參考解法 2】

用 2、0、1、7 這四個數碼各一個排成的四位數共有以下的 18 個。

1027、1072、1207、1270、1702、1720、2017、2071、2107、2170、2701、2710、7012、7021、7102、7120、7201、7210。

被 11 除餘 4，即奇數位數碼之和比偶數位數碼之和大 4 或小 7。而只有 1027、1720、2017、2710 這 4 個四位數符合。

答：4 個

6. 已知一個三角形的兩條邊的長度分別是 6 cm 與 13 cm，第三條邊的長度也是整數 cm，請問這個三角形的周長最小可能是多少 cm？

【參考解法】

由三角形的兩邊差必小於第三邊之長度知第三邊的長度大於 $13 - 6 = 7$ cm，故其長度至少為 8 cm，因此周長最小為 $13 + 6 + 8 = 27$ cm。

答：27 cm

7. 將數 1、2、3、4 分別填入 4×4 方格表的小方格中，使得每一行、每一列上的四個數都不相同。若已填入部分小方格的數，如下圖所示，請問圖中 A、B 位置上的數之和是多少？

	A	4	
B		1	
1	2	3	4
3	4	2	1

【參考解法】

A 下方的空格不能填 1、2、4，故只能填 3，因此 A 格只能填 1；

B 上方的空格不能填 1、3、4，故只能填 2，因此 B 格只能填 4。

故所求和為 $1 + 4 = 5$ ，完整的填法如右圖所示。

答：5

2	1	4	3
4	3	1	2
1	2	3	4
3	4	2	1

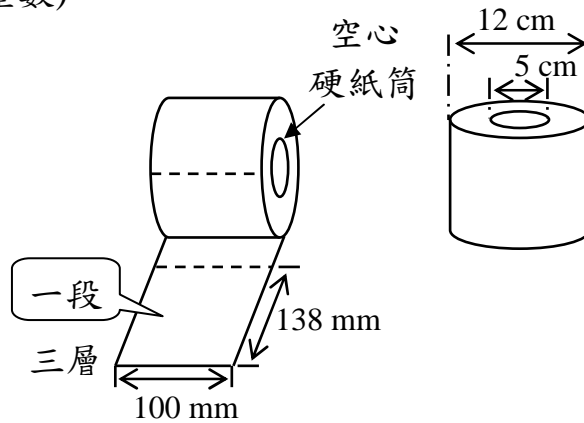
8. 小虎與小亮都郵寄了一件重量超過 10 kg 的包裹，郵局的收費標準為：未超出 10 kg 的包裹每 kg 的運費為 6 元，超出 10 kg 的部分每 kg 平均運費比原價低 2 元。已知小虎郵寄的包裹比小亮郵寄的包裹重 20% 且郵寄費多 12 元。請問小虎郵寄的包裹之重量為多少 kg？

【參考解法】

由題意知，小虎與小亮兩人的包裹都超過 10 kg，小虎郵寄的包裹比小亮郵寄的包裹郵寄費多 12 元，又知超出 10 kg 的部分每 kg 平均運費為 $6 - 2 = 4$ 元。故小虎郵寄的包裹比小亮郵寄的包裹重 $12 \div 4 = 3$ kg，已知小虎郵寄的包裹比小亮郵寄的包裹重 20%，故小亮的包裹重為 $3 \div 20\% = 15$ kg，即可得知小虎郵寄的包裹之重量為 $15 + 3 = 18$ kg。

答：18 kg

9. 如圖是一個圓柱狀的捲筒衛生紙，中間有一個硬紙板做成的空心圓筒，衛生紙等分成若干小段繞在圓筒上。其包裝上標記：「138 mm×100 mm (長×寬)/段，3層」，表示每小段的長為 138 mm、寬為 100 mm，並含有三層。已知每層衛生紙的厚度為 0.13 mm、中間圓筒的外部直徑是 5 cm、整卷衛生紙的直徑是 12 cm，請問一個捲筒衛生紙共有多少段？(圓周率 π 取 3.14，所得結果四捨五入保持整數)

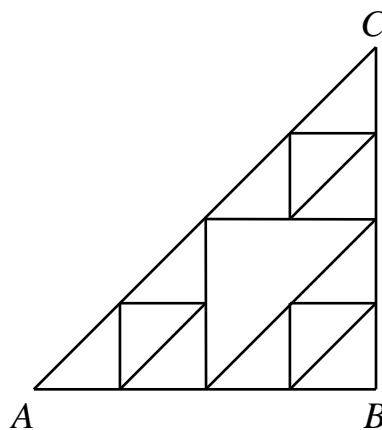


【參考解法】

因圓柱的體積為底圓面積與高之乘積，且高 $100\text{ mm} = 10\text{ cm}$ ，故衛生紙的體積為 $3.14 \times (\frac{12}{2})^2 \times 10 - 3.14 \times (\frac{5}{2})^2 \times 10 = 934.15\text{ cm}^3$ 。而接著再由 $138\text{ mm} = 13.8\text{ cm}$ 、 $0.13\text{ mm} = 0.013\text{ cm}$ ，知每一段衛生紙的體積為 $10 \times 13.8 \times 0.013 \times 3 = 5.382\text{ cm}^3$ ，故一個捲筒衛生紙共有 $\frac{934.15}{5.382} \approx 173.57 \approx 174$ 段。

答：174 段

10. 下圖是由一些等腰直角三角形拼成的圖形，若一隻螞蟻欲沿著三角形的邊從 A 點爬到 C 點，規定在爬行的過程中只能向右方、上方或者斜右上方爬行。請問這隻螞蟻總共有多少條不同的爬行路徑？

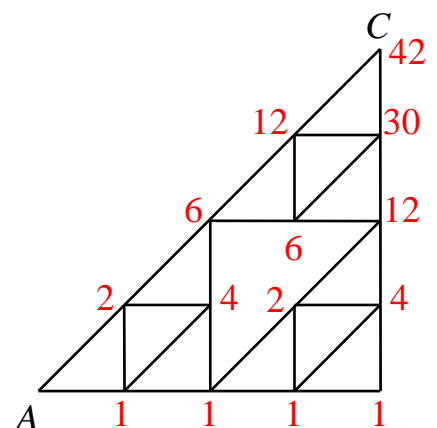


【參考解法】

如圖所示，圖中各點的數即為螞蟻從起點到該點的不同路徑數：

故從 A 點爬到 C 點共有 42 條不同的爬行路徑。

答：42 條



11. 從 1 到 174 的所有正整數中選出 12 個互不相同且總和恰為 2017 的正整數。
請問總共有多少種不同的選取方式？

【參考解法】

從 1 到 174 的所有正整數中選出 12 個互不相同的正整數，其和最大為

$$174+173+172+171+170+169+168+167+166+165+164+163=2022。$$

所以只需從 163、164、165、166、167、168、169、170、171、172、173、174 這些數中總共減掉 5。下面分情況討論：

(1) 僅有一個數減去 5。為了避免重複，這個數不能大於或等於 168，共有以下 5 種方式：

$$174+173+172+171+170+169+168+167+166+165+164+158=2017$$

$$174+173+172+171+170+169+168+167+166+165+163+159=2017$$

$$174+173+172+171+170+169+168+167+166+164+163+160=2017$$

$$174+173+172+171+170+169+168+167+165+164+163+161=2017$$

$$174+173+172+171+170+169+168+166+165+164+163+162=2017$$

(2) 有一個數減去 4、另一個數減去 1。可知只能從小於 167 的數減去 4 且將 163 減 1，但不可以有重複的數，故得到二條和為 2017 的等式：

(a) 165 減去 4 且將 163 減 1

$$174+173+172+171+170+169+168+167+166+164+162+161=2017$$

(b) 164 減去 4 且將 163 減 1

$$174+173+172+171+170+169+168+167+166+165+162+160=2017$$

(3) 減去的數不大於 3。可知只能從小於 166 的數減去 3 且從小於 165 的數減去 2 或減 1，但都不可能沒有不重複的數，故此情況沒有符合的等式。

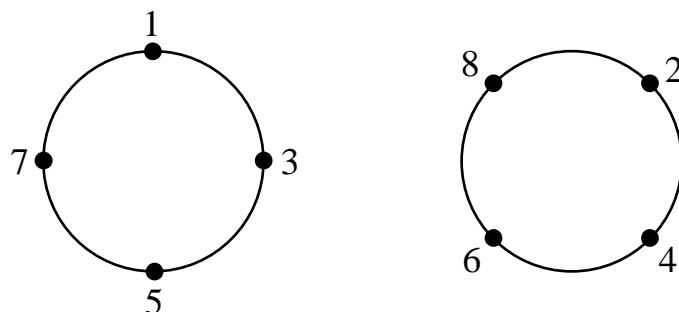
綜上所述，共有 7 種不同的選擇方式。

答：7 種

12. 從 1、2、3、4、5、6、7、8 這八個數中取出互不相同的數至少二個，使得取出的數中任何兩個數之差都不為 2 或 6 (例如，如果取出的數為 1，就不能取出 3 或 7)。請問共有多少種不同的取數的方法？

【參考解法 1】

由題意，可以把這 8 個數分成如下圖所示的兩組，可以判斷出每組中相鄰的兩個數不能同時取出，而其中一組的數之取法不影響另一組的數之取法。因此，每組最多能取出兩個數，也就一次總共最多能取出 4 個數。



下面按取出的數之個數分情況討論：

(1) 共取出 2 個數：

若每組取 1 個，則有 $4 \times 4 = 16$ 種；若其中一組取 2 個、另一組不取，則有 $2 \times 2 = 4$ 種。故共有 $16 + 4 = 20$ 種取法；

(2) 共取出 3 個數：

只能是其中一組取 2 個、另一組取 1 個，共 $2 \times 2 \times 4 = 16$ 種。

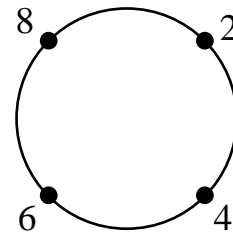
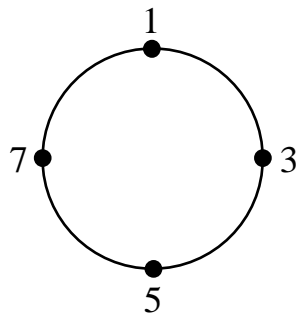
(3) 共取出 4 個數：

只能是兩組各取 2 個，共 $2 \times 2 = 4$ 種。

綜上所述，總共有 $20 + 16 + 4 = 40$ 種取法。

【參考解法 2】

由題意，可以把這 8 個數分成如下圖所示的兩組，可以判斷出每組中相鄰的兩個數不能同時取出，故在同一組中有不取、取 1 個、取 2 個這三種情況，而每一種情況的取法數依序為 1、4、2 種，故同一組的取法總數為 $1 + 4 + 2 = 7$ 種。因其中一組的數之取法不影響另一組的數之取法，故知兩組總共有 $7 \times 7 = 49$ 種取法，但這包括其中一組不取另一組取 1 個與兩組都不取出數的情況，此不符合要求。所以總共有 $49 - 4 - 4 - 1 = 40$ 種取法。



答：40 種