2017 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第　一　試：應　用　題 (考試時間 90 分鐘)

_______縣市_______國民小學___年級　編號：_______姓名：___________性別：___

請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。
本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 5 分，共 60 分

1. 已知正整數 2017 為一個質數、包含有四個相異的數碼且其數碼和恰為 10。在比 2017 大且同樣具有這三個性質的正整數中，請問最小的數是什麼？

【參考解法】

可從僅滿足包含有四個相異的數碼且其數碼和恰為 10 的數中找出質數。而大於 2 的質數都是奇數，因此個位數碼只能是 1、3、7、9。因要找出最小的數，可從首二位數碼為 20 開始討論，因要比 2017 大、故十位數碼至少為 3。

若十位數碼為 3，則其個位數碼為$10-2-0-3=5$，故不合；

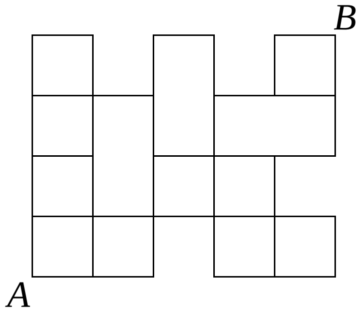
若十位數碼為 4，則其個位數碼為$10-2-0-4=4$，故不合；

若十位數碼為 5，則其個位數碼為$10-2-0-5=3$，即 2053，

因為$45\times45=2025<2053<46\times46=2116$且 2053 不可被 3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43 這些小於 45 的質數整除，故它滿足這三個性質。

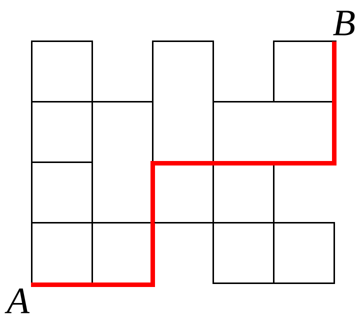
答：2053

2. 有一隻小蟲打算要從 A 點沿著格線要到 B 點，如下圖所示。它在水平方向上每爬行小正方形的一個邊長需時 9 秒、在鉛直方向上每爬行小正方形的一個邊長需時 12 秒、每次轉彎需時 2 秒。請問這隻小蟲從 A 點到 B 點至少需時多少秒？



【參考解法】

可判斷出小蟲在水平方向至少需移動小正方形的五個邊長、在鉛直方向至少需移動小正方形的四個邊長，且要儘量減少轉彎的次數。而如紅線所示之爬行路徑轉彎次數最少，只要轉彎三次，因此至少需費時$9\times5+12\times4+2\times3=99$秒。



答：99 秒

3. 小美在八次測驗中平均每次答對 27 題。已知她在每次測驗中都答對整數題，並且她答對題數最少的一次測驗是 18 題，請問她答對題數最多的一次測驗至少答對多少題？

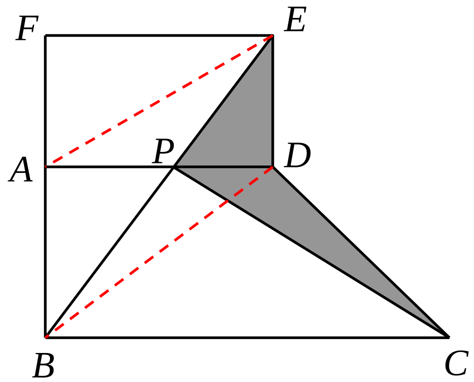
【參考解法】

可知小美在八次測驗的總答對題數為 $27\times 8=216$ 題。她答對題數最少的一次測驗是 18 題，故她在其餘七次測驗的平均答對題數為 $\dfrac{216-18}{7}=\dfrac{198}{7}=28\dfrac{2}{7}<29$ 題，故知她答對題數最多的一次測驗至少是 29 題，例如這八次測驗的答對題數分別為 18、28、28、28、28、28、29、29 題。

答：29 題

4. 在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $AD=30\,\text{cm}$、$AB=24\,\text{cm}$、$\angle DAB=\angle ABC=90^\circ$，如下圖所示。以 AD 為一邊向外作矩形 $ADEF$，其中 $DE=18\,\text{cm}$。連接 BE 交 AD 於點 P，再連接 PC。請問陰影部分的面積是多少 cm^2？

【參考解法 1】



連接 AE 與 BD，如圖所示。由 $AD//BC$ 可判斷出三角形 PDC 與三角形 PDB 的面積相等，所以陰影部分的面積等於三角形 BPD 與三角形 PDE 的面積和，即等於三角形 BDE 的面積。由 $AB//DE$ 可知三角形 BDE 的面積等於三角形 ADE 的面積，因此陰影部分的面積為 $\dfrac{1}{2}\times 30\times 18=270\,\text{cm}^2$。

【參考解法 2】

由 $AP//FE$ 可知三角形 BPA 與三角形 BEF 相似，所以 $\dfrac{AP}{FE}=\dfrac{AB}{BF}=\dfrac{24}{24+18}=\dfrac{4}{7}$，可得知 $AP=\dfrac{4}{7}\times 30=\dfrac{120}{7}$ cm，即 $PD=30-\dfrac{120}{7}=\dfrac{90}{7}$ cm。因此陰影部分的面積等於 PDE 與 PDC 的面積和，即 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{90}{7}\times 18+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{90}{7}\times 24=\dfrac{45}{7}\times(18+24)=270\,\text{cm}^2$。

答：270 cm^2

5. 小花班上包括她共有 30 位同學手牽手圍成一圈，以逆時針方向依照以下規則報數：如果某位同學報的數是個一位數，則右手邊的下一位同學就要報出這個數與 7 的和；如果某位同學報的數不是一位數，則右手邊的下一位同學就要報出這個數的個位數碼與 4 的和。若小花第一次報的數為 33，請問小花第三次報的數是什麼？

【參考解法】

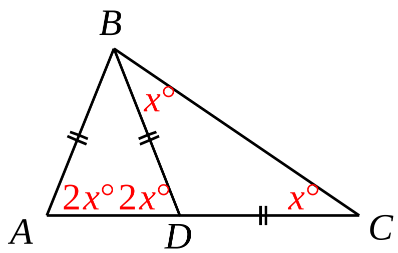
將小花第一次報數之後的其他同學所報的數依序列出：33、7、14、8、15、9、16、10、4、11、5、12、6、13、7、14、…。

可發現從小花第一次報數之後所報的數是由 7、14、8、15、9、16、10、4、11、5、12、6、13 這十三個數依序循環重複出現的。而小花第三次報數時是第一次報數之後的第 60 次，而因 $60=13\times4+8$，故小花第三次報數時所報的數是這十三個數中的第八個數，即 4。

答：4

6. 在三角形 ABC 中，已知點 D 在 AC 邊上並且 $AB=BD=CD$，如圖所示。若三角形內所有角的度數都是偶數，請問 $\angle ABC$ 最大可能為多少度？

【參考解法】



若令 $\angle ACB=x^\circ$，則知 $\angle DBC=x^\circ$ 且 $\angle BAD=\angle BDA=2x^\circ$。

由三角形的內角和為180°可推知 $\angle ABC=180^\circ-2x^\circ-x^\circ=180^\circ-3x^\circ$，因所有角的度數都是偶數，$x$ 的最小值為 2，所以 $\angle ABC$ 最大可能為 $180^\circ-6^\circ=174^\circ$。

答：174°

7. 定義運算「$a\oplus b$」為從正整數 a 開始連續 b 個正整數相加所得到的和，例如 $5\oplus2=5+6=11$、$3\oplus6=3+4+5+6+7+8=33$。

請問 $10\oplus9+20\oplus9+30\oplus9+\cdots+90\oplus9$ 的值是多少？

【參考解法 1】

可知：

$$10\oplus9=10+11+12+13+14+15+16+17+18=10\times9+36$$
$$20\oplus9=20+21+22+23+24+25+26+27+28=20\times9+36$$
$$30\oplus9=30+31+32+33+34+35+36+37+38=30\times9+36$$
$$\vdots$$
$$90\oplus9=90+91+92+93+94+95+96+97+98=90\times9+36$$

故所求為 $9\times(10+20+30+\cdots+90)+36\times9=9\times450+36\times9=9\times486=4374$。

【參考解法 2】

$$\begin{aligned}&10\oplus 9+20\oplus 9+30\oplus 9+\cdots+90\oplus 9\\=&10\oplus 90-19-29-39-49-59-69-79-89-99\\=&10+11+12+\cdots+96+97+98-19-29-39-49-59-69-79-89\\=&\frac{(10+98)\times 89}{2}-\frac{(19+89)\times 8}{2}\\=&54\times(89-8)=54\times 81=4374\end{aligned}$$

答：4374

8. 小華寫出所有數碼都是偶數的四位數，小明寫出恰為完全平方數的四位數。請問被兩人寫出的四位數中有多少個數是相同的？

【參考解法 1】

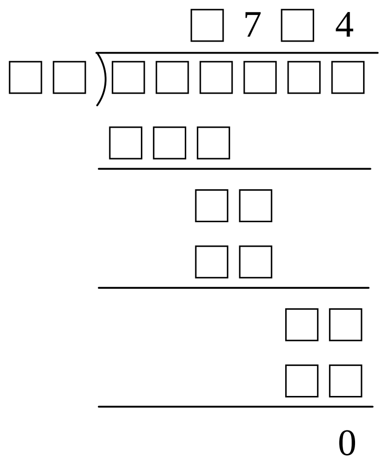
小華所寫出的四個數碼都是偶數，故此數大於或等於 2000 且小於或等於 8888。由 $44^2=1936<2000<46^2=2116$、$94^2=8836<8888<95^2=9025$ 可判斷出在小明所寫出的數中，僅 46 到 94 之間的偶數之平方可能出現在小華所寫出的數中。現因 $46^2=2116$、$48^2=2304$、$50^2=2500$、$52^2=2704$、$54^2=2916$、$56^2=3136$、$58^2=3364$、$60^2=3600$、$62^2=3844$、$64^2=4096$、$66^2=4356$、$68^2=4624$、$70^2=4900$、$72^2=5184$、$74^2=5476$、$76^2=5776$、$78^2=6084$、$80^2=6400$、$82^2=6724$、$84^2=7056$、$86^2=7396$、$88^2=7744$、$90^2=8100$、$92^2=8464$、$94^2=8836$，所以僅 $68^2=4624$、$78^2=6084$、$80^2=6400$、$92^2=8464$ 是數碼皆為偶數的四位數，即只有 4 個數會同時出現在兩人所寫出的數之中。

【參考解法 2】

小華所寫出的四個數碼都是偶數，故此數大於或等於 2000 且小於或等於 8888。由 $44^2=1936<2000<46^2=2116$、$94^2=8836<8888<95^2=9025$ 可判斷出在小明所寫出的數中，僅 46 到 94 之間的偶數之平方可能出現在小華所寫出的數中。而當一個完全平方數的個位數碼是 6 時，其十位數碼必為奇數，故 46、54、56、64、66、74、76、84、86、94 的平方都不可能出現在小華所寫出的數中。因 $48^2=2304$、$50^2=2500$、$52^2=2704$、$58^2=3364$、$60^2=3600$、$62^2=3844$、$68^2=4624$、$70^2=4900$、$72^2=5184$、$78^2=6084$、$80^2=6400$、$82^2=6724$、$88^2=7744$、$90^2=8100$、$92^2=8464$，所以僅 $68^2=4624$、$78^2=6084$、$80^2=6400$、$92^2=8464$ 是數碼皆為偶數的四位數，即只有 4 個數會同時出現在兩人所寫出的數之中。

答：4 個

9. 在右側的除法算式中，已知每一個□都代表一個數碼且每一個數的首位數碼都不為 0。請問算式中被除數的最小可能值是多少？



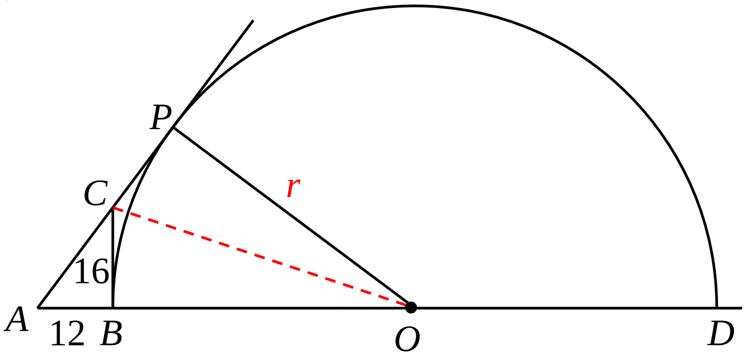
【參考解法】

由算式可判斷出商的十位數碼為 0，且因除數乘以 7 之後仍為二位數，故商的首位數碼為 8 或 9，即商為 8704 或 9704。因二位數中，12 乘以 7 之後為二位數且乘以 9 之後為三位數、13 乘以 7 之後為二位數且乘以 8、9 之後為三位數，故除數為 12 或 13，因此被除數的可能值是 $12\times9704=116448$ 、 $13\times9704=126152$ 、 $13\times8704=113152$ ，所以被除數的最小可能值為 113152，此時算式為：

$$\begin{array}{r}
8704 \\
13\,\big)\,113152 \\
\underline{104} \\
91 \\
\underline{91} \\
52 \\
\underline{52} \\
0
\end{array}$$

答：113152

10. 在直角三角形 ABC 中，已知 $\angle ABC=90^\circ$ 、 $AB=12\,\text{cm}$ 、 $BC=16\,\text{cm}$。半圓 O 的圓心在 AB 的延長線上，且線段 BD 是這個半圓的直徑。若 AC 的延長線與半圓 O 恰只相交於一點 P，並且 $AP\perp OP$ ，如下圖所示。請問線段 BD 的長度為多少 cm？



【參考解法 1】

由勾股定理可知 $AC^2=12^2+16^2=400$，因此 $AC=20\,\text{cm}$。連接 OC。因 $AP\perp OP$ ，故知 OP 為半徑。令半圓 O 的半徑為 r cm，即可得知三角形 AOC 的面積為 $\frac{1}{2}AC\times OP=10r$ ；另一方面，三角形 AOC 也可視為底 AO 高 BC 的三角形，故面積為 $\frac{1}{2}AO\times BC=\frac{1}{2}(12+r)\times16=96+8r$ 。故可得知 $10r=96+8r$ ，即 $r=48$ 。而線段 BD 的長度等於直徑，即其值為 $48\times2=96\,\text{cm}$。

【參考解法 2】

由勾股定理可知 $AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400$，因此 $AC = 20\,\text{cm}$。連接 OC。因 $AP \perp OP$，$\angle CBO = \angle CPO = 90°$，再由 $OP = OB$、$OC = OC$ 可得知三角形 COP 與三角形 COB 全等，故知 $CP = BC = 16\,\text{cm}$，也因此可得知三角形 COP 面積為三角形 AOC 面積的 $\dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$。即三角形 ABC 面積為三角形 AOC 面積的 $\dfrac{1}{5}$，故三角形 ABC 面積為三角形 BOC 面積的 $\dfrac{1}{4}$，即 $OB = 4AB = 4\times 12 = 48\,\text{cm}$，而線段 BD 的長度等於直徑，即其值為 $48\times 2 = 96\,\text{cm}$。

【參考解法 3】

由勾股定理可知 $AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400$，因此 $AC = 20\,\text{cm}$。連接 OC。由 $OP \perp AC$ 可知 $\angle APO = 90°$，再由 $\angle PAO = \angle BAC$ 可得知三角形 ABC 與三角形 APO 相似。令半圓 O 的半徑為 $r\,\text{cm}$，可得知 $\dfrac{r}{12+r} = \dfrac{PO}{AO} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$，即 $5r = 48 + 4r$，因此 $r = 48$。而線段 BD 的長度等於直徑，其值為 $48\times 2 = 96\,\text{cm}$。

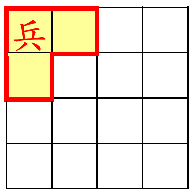
答：96 cm

11.棋盤上的一枚兵可以攻擊與它所在小方格有共同邊的小方格。若棋盤上的每個小方格內至多可以放置一枚兵，請問在 4×4 的棋盤內至少要放置多少枚兵使得再也無法在棋盤內放置任何一枚不被攻擊的兵？

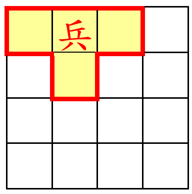
【參考解法】

依照兵所在位置觀察：

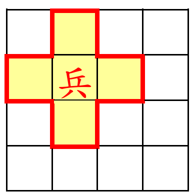
- 若兵位於角落，則兵所在的小方格與可以被它攻擊的小方格會構成一片 V 形三方塊，如右圖所示：



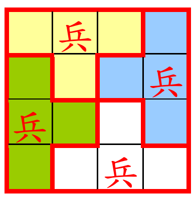
- 若兵位於邊上但不是角落，則兵所在的小方格與可以被它攻擊的小方格會構成一片 T 形四方塊，如右圖所示：



- 若兵位於內部，則兵所在的小方格與可以被它攻擊的小方格會構成一片 X 形五方塊，如右圖所示：



此時即可將本題視為如何利用最少片的 V 形三方塊、T 形四方塊、X 形五方塊拼成一個 4×4 的矩形。因為 $16 \div 5 = 3.2 > 3$，因此至少需使用 4 片以上的多方塊，即至少要在棋盤上放置 4 枚兵，右圖為一種放法。

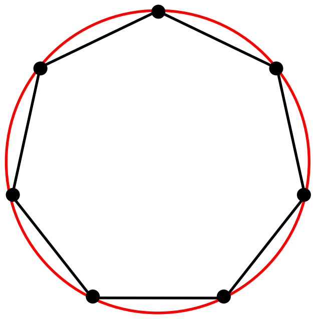


答：4 枚

12.從一個正七邊形的七個頂點中任選三個頂點可構成一個三角形。請問這些三角形中總共有多少個是銳角三角形？

【參考解法】

可知正七邊形的頂點都在其外接圓上，如圖所示。

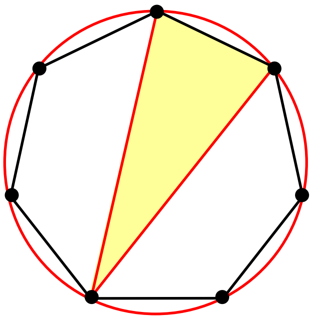
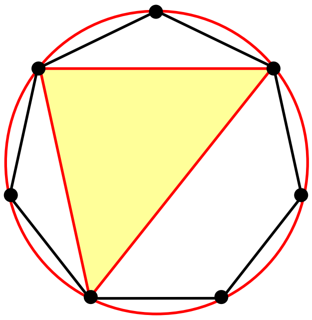


從這 7 個頂點中任選三個頂點共可作出 $\frac{7\times6\times5}{6}=35$ 個三角形。若三角形的一個內角分別夾 1、2、3、4、5 段弧，其內角分別為 $\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{7}\times1=25\frac{5}{7}^\circ$、$\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{7}\times2=51\frac{3}{7}^\circ$、$\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{7}\times3=77\frac{1}{7}^\circ$、$\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{7}\times4=102\frac{6}{7}^\circ$、$\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{7}\times5=128\frac{4}{7}^\circ$。

【算法 1】

所以這些銳角三角形的內角只能夾 1、2、3 段弧。

- 三個內角分別夾 1、3、3 段弧的三角形，其中夾 1 段弧的角之頂點共有 7 種取法，故共有 7 個銳角三角形。
- 三個內角分別夾 2、2、3 段弧的三角形，其中夾 3 段弧的角之頂點共有 7 種取法，故共有 7 個銳角三角形。

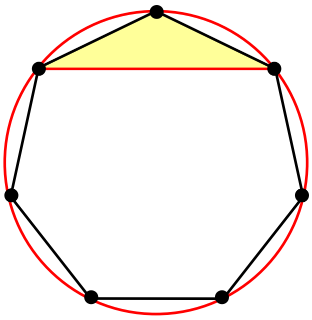
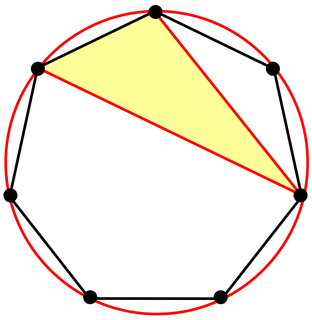
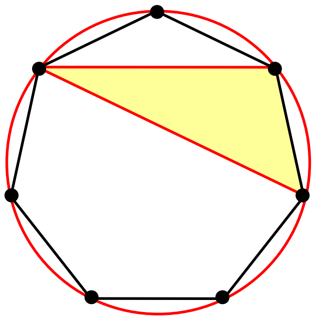



故共有 $7+7=14$ 個是銳角三角形。

【算法 2】

可知不可能有直角三角形，且其中的鈍角三角形之最大內角只能夾 4、5 段弧。

- 最大內角夾 5 段弧的三角形，其可以有 7 種取法，而其頂點只有一種可能的取法，故共有 7 個鈍角三角形。
- 最大內角夾 4 段弧的三角形，其可以有 7 種取法，而頂點有兩種可能的取法，故共有 $7\times2=14$ 個鈍角三角形。

故共有 $7+14=21$ 個是鈍角三角形，即共有 $35-21=14$ 個是銳角三角形。

答：14 個