

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

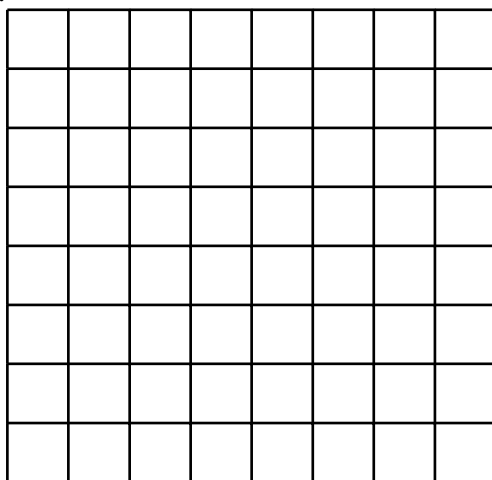
2017 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第二 試：綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

縣市 _____ 國民小學 _____ 年級 編號： _____ 姓名： _____ 性別： _____

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，每一題都必須詳細寫下想法或理由。
每題 20 分，共 60 分。

1. 請在下面的 8×8 方格表上放置 n 枚籌碼，使得無論如何選定 4 行且同時選定 4 列移除其上面所有的籌碼，都無法清空方格表上所有的籌碼。請問 n 的最小值為何？如何放置？

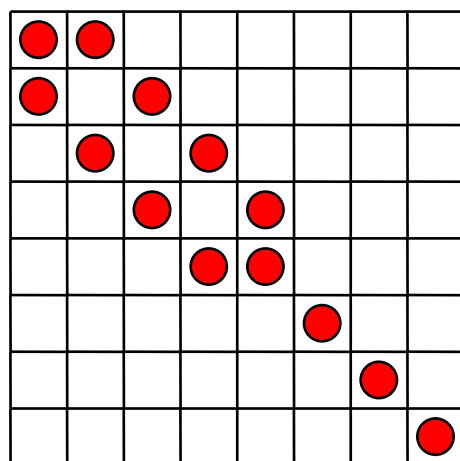


【參考解法】

現驗證若籌碼數少於或等於 12 個時，一定都可依題意所述之方式清空籌碼。不妨假設現共有 12 枚籌碼，根據鴿籠原理至少有 4 行中的籌碼都各不超過 1 枚，(5 分)任選籌碼數不超過 1 枚的 4 行，將其它 4 行中的所有籌碼移除，此時方格表上的籌碼總數至多只有 4 枚，再選定 4 列移除其上面所有的籌碼，即可清空方格表上所有的籌碼。(5 分)

所以最少需 13 枚籌碼，(5 分)如下圖所示是一種放置方法的例子：在左上方 5×5 的方格表內放置 10 枚，使得每行每列各恰有 2 枚籌碼，其它 3 枚籌碼則放置在右下方 3×3 的方格表內，使得每行每列各恰有 1 枚籌碼。在此情況下無論如何選定哪 4 行移除其上面所有的籌碼，棋盤上剩下的籌碼都至少佔據五列，反之亦然，故無法清空方格表上所有的籌碼。(5 分)

- 從每一行、每一列都至少放一枚籌碼開始討論，即至少需 8 枚籌碼，2 分
- 判斷出可從 8 枚籌碼開始討論且 8 枚籌碼不可能，2 分
- 列舉說明 9、10、11、12 枚籌碼無法題意所述之方式清空籌碼，每得一種正確的情況 2 分；若該情況說明不完整，至多 1 分。
- 觀察出無論如何取走 4 行(列)的籌碼後，至少需有 5 列(行)上仍有籌碼，2 分。



2. 有五個砝碼，它們的重量分別為 130 g、140 g、150 g、170 g、200 g，而它們的外觀完全相同，無法看出輕重。現有一台有刻度的磅秤，可以秤出重量小於或等於 400 g 的物體之重量。請問要如何操作才能在秤三次內保證找出重量為 170 g 的砝碼？

【參考解法】

由於磅秤只可以秤出重量小於或等於 400 g 的物體之重量，而最輕的三個砝碼之總重量大於 400 g，故每次至多可秤二個砝碼。

第一次可先任取二個砝碼秤重，此時可能的重量有：

$$\begin{aligned} &130+140=270\text{ g}、130+150=280\text{ g}、130+170=300\text{ g}、130+200=330\text{ g}、 \\ &140+150=290\text{ g}、140+170=310\text{ g}、140+200=340\text{ g}、150+170=320\text{ g}、 \\ &150+200=350\text{ g}、170+200=370\text{ g}。 \end{aligned} \quad (5\text{ 分})$$

可發現其中僅 300 g、310 g、320 g、370 g 這四種重量會有 170 g 的砝碼，而其餘六種都沒有。(5 分)若第一秤的重量為 300 g、310 g、320 g、370 g 這四種重量其中之一，則再任取這兩個砝碼之一秤重，即可辨別出 170 g 的砝碼；(5 分)若第一秤為其它六個重量之一，則第二秤、第三秤分別秤未取出的一個砝碼，如果其中有秤出 170 g，即為此砝碼，如果都未秤出 170 g，則未秤重的砝碼為 170 g 的砝碼。(5 分)

● 僅舉例而無策略，不給分。

3. 黑板上已經寫上一個 0，然後要求 A、B 兩人輪流在黑板上已寫出的表達式的右端添加符號：A 每次添加一個「+」(加號)或一個「-」(減號)，B 則添加 1 到 101 之間的某一個正整數。兩組人各作 101 次，A 先開始，B 則先後將 1 到 101 之間的所有正整數各恰寫出一次(不一定依照數的大小順序填寫)。遊戲結束時，在黑板上所寫出的算式之值擦掉正負號後的數值就是 B 所得的分數。A 要設法使 B 的得分越少越好，B 要使自己的得分越多越好，請問 B 保證最多可以得到多少分？A、B 的策略分別為何？

【參考解法】

若 A 採用這樣的策略：當黑板上的算式之值大於 0 時，他就添加一個「-」號；小於 0 時，他就添加一個「+」號；等於 0 時，則隨意添加。(6 分)於是每一步之後(包括最後一步)，黑板上所寫的算式之值擦掉正負號後的數值都不會大於 101，從而 B 的得分就不可能超過 101。(4 分)接下來證明 B 可以使自己的分數得到 101 分。將前 100 個正整數分為兩個和數相等的組，每組 50 個數：

$$\begin{aligned} &1、4、5、8、\dots、4k-3、4k、\dots、97、100 \text{ 與} \\ &2、3、6、7、\dots、4k-2、4k-1、\dots、98、99 \end{aligned}$$

B 分別數出 A 已經寫出的加號的個數與減號的個數。B 的策略為：只要加號的個數還不多於 50，那麼她就在各個加號之後依次寫上第一組中的數；相應地，只要減號的個數還不多於 50，就在各個減號之後依次寫上第二組的數。而一旦某種符號出現第 51 次，乙就在後面寫上數 101。(6 分)此時，黑板上所有與 101 同號的數之和擦掉正負號後的數值至少比前 100 個正整數中其餘的數之和大 101。接下來，B 可任意利用前 100 個數中尚未利用過的數。這就表明，B 至少可以獲得 101 分。(4 分)

答：101 分

- 提出 A 的可行策略，6 分；證明所提出的策略可行，4 分
- 提出 B 的可行策略，6 分；證明所提出的策略可行，4 分
- 給出答案為 101 且有提出策略，但策略說明不清楚，4 分
- 僅給出答案為 101，0 分