

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2018 小學數學競賽選拔賽初賽試題

第二試：應用題（考試時間 90 分鐘）

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。
本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分

1. 請問共有多少種的不同等腰三角形使得底邊與底邊上的高之長度皆為正整數 cm 且等腰三角形面積為 2018 cm^2 ？

【參考解法】

因等腰三角形的面積為 $\frac{1}{2} \times (\text{底邊長}) \times (\text{高長})$ ，故知滿足題意的等腰三角形之底邊與底邊上的高之長度的乘積為 $2018 \times 2 = 2^2 \times 1009$ 。故知共有 $(2+1) \times (1+1) = 6$ 種形狀不同的等腰三角形。

答：6 種

2. 有一個大於 3 的正整數，它分別除以五個不同的質數時，其餘數都是 3，請問滿足上述條件的最小正整數是什麼？

【參考解法】

若 n 滿足條件時，則 $n-3$ 至少有五個不同的質因數，且這些質因數都大於 3，因此 $n-3$ 的最小值為 $5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 85085$ ，即滿足上述條件的最小正整數是 85088。

答：85088

3. 某聲樂家清嗓時，每一聲的持續時間都恰為 3.5 秒。某次她清嗓時，按相同節奏共發出了 10 聲，一共持續了 62 秒。若她清嗓時依此節奏發出 16 聲，從第一聲響起至最後一聲結束，請問這位聲樂家共花費多少秒？

【參考解法 1】

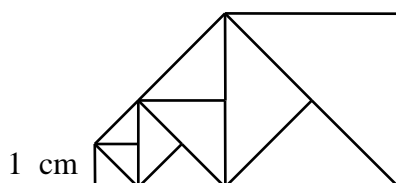
因 10 聲共耗時 $3.5 \times 10 = 35$ 秒，故聲與聲之間隔為 $(62 - 35) \div (10 - 1) = 3$ 秒，所以要發出 16 聲，從第一聲響起至最後一聲結束，共花費 $16 \times 3.5 + (16 - 1) \times 3 = 101$ 秒。

【參考解法 2】

因 10 聲共耗時 $3.5 \times 10 = 35$ 秒，故聲與聲之間隔為 $(62 - 35) \div (10 - 1) = 3$ 秒，所以從一個鐘聲結束至下一個鐘聲結束，共花費 $3 + 3.5 = 6.5$ 秒。因 16 聲比 10 聲多了 6 聲，故知從第 1 聲響起至第 16 聲結束，共花費 $62 + 6 \times 6.5 = 101$ 秒。

答：101 秒

4. 從邊長為 1 cm 的小正方形開始，以這個正方形的對角線為邊作第 2 個正方形，再以第 2 個正方形的對角線作第 3 個正方形，這樣一直做下去，如下圖所示。請問至少要作到第幾個正方形才能保證它的面積超過 2018 cm^2 ？



【參考解法】

考慮兩腰長度為 1 cm 的等腰直角三角形。由題設可知第 1 個正方形由 2 個兩腰長度為 1 cm 的等腰直角三角形所組成；第 2 個正方形由 $4 = 2^2$ 個兩腰長度為 1 cm 的等腰直角三角形組成，其面積為 2 cm^2 ；第 3 個正方形由 $8 = 2^3$ 個兩腰長度為 1 cm 的等腰直角三角形組成，其面積為 4 cm^2 ；...；第 n 個正方形由 2^n 個兩腰長度為 1 cm 的等腰直角三角形組成，其面積為 $2^n \div 2 = 2^{n-1} \text{ cm}^2$ 。由題意知要找出最小的 n 值使得 $2^{n-1} \geq 2018$ 。因 $2^{10} = 1024 < 2018 < 2048 = 2^{11}$ ，故至少要作到第 12 個正方形。

答：第 12 個

5. 甲、乙、丙、丁、戊五位漁夫合力捕獲了一些魚。分配魚貨時，五人決定依甲先取 10 條、乙接著取 9 條、丙接著取 8 條、丁接著取 7 條、戊再取 6 條的順序不斷重複循環取魚。當最後一輪輪到丙要取魚時，漁船上只剩下 2 條魚，此時丁共已取得 49 條魚。請問這五位漁夫原先共捕獲多少條魚？

【參考解法】

因為最後一輪丁沒有取到魚，故知這五位漁夫之前共取了 $49 \div 7 = 7$ 輪的魚。每一輪他們共取 $10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 40$ 條魚，故截至最後一輪之前，這五位漁夫共取走了 $7 \times 40 = 280$ 條魚。接著最後一輪只有甲取 10 條魚、乙取 9 條魚、丙欲取時只剩下 2 條魚，因此可知這五位漁夫原先共捕獲 $280 + 10 + 9 + 2 = 301$ 條魚。

答：301 條

6. 請問共有多少個十位數它恰有 9 個相同的數碼？

【參考解法】

令 N 為有 9 個數碼相同的十位數。可知 N 是由兩個相異數碼所構成，假設 N 是由兩個相異數碼 a 、 b 所組成。

若 a 、 b 皆為非 0 數碼，則 a 有 9 種選擇、 b 有 8 種選擇且對於每一對 a 、 b 而言，可組成 10 個滿足題意的數，因此這樣的 N 共有 $9 \times 8 \times 10 = 720$ 個；

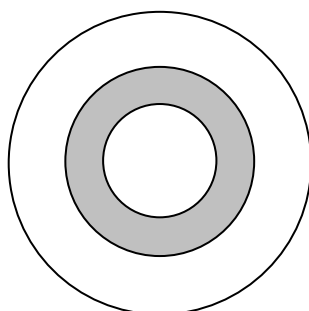
若 a 、 b 這兩個數碼其中一個為 0 時，可不妨假設 $b = 0$ ，則有以下兩種狀況：

- (i) N 由 9 個 a 與 1 個 0 組成，此時由 N 是十位數知對於每一個 a 而言，可組成 9 個這樣的數，且再由 a 有 9 種選擇知這樣的 N 共有 $9 \times 9 = 81$ 個；
(ii) N 由 1 個 a 與 9 個 0 組成，此時由 N 是十位數知對於每一個 a 而言，只可組成 1 個這樣的數，且再由 a 有 9 種選擇這樣的 N 共有 $9 \times 1 = 9$ 個。

因此共有 $720 + 81 + 9 = 810$ 個這樣的十位數。

答：810 個

7. 有三個同心圓，由小到大它們的半徑比為 4：6：9，且已知中圓與小圓之間的陰影圓環區域面積為 400 cm^2 ，如下圖所示。請問大圓面積是多少 cm^2 ？



【參考解法】

因半徑比為 4 : 6 : 9，故其面積比為 16 : 36 : 81，因此陰影圓環面積是大圓面積的 $\frac{36-16}{81} = \frac{20}{81}$ 。現已知中圓與小圓之間的陰影圓環區域面積為 400 cm^2 ，故大圓面積為 $400 \div \frac{20}{81} = 400 \times \frac{81}{20} = 1620 \text{ cm}^2$ 。

答：1620 cm^2

8. 書店老闆要將 25 本一樣的书分別送到三間不同的分店販賣。若每間分店至少要分送 4 本，請問書店老闆共有多少種不同的送法？

【參考解法 1】

可知當其中一間分店分 k 本書時，其餘二間分店要分 $25-k$ 本書，其中 $k \geq 4$ 且 $25-k \geq 4+4=8$ ，即 $4 \leq k \leq 17$ ，此時共有 $25-k+1-8=18-k$ 種送法。因 k 值範圍為從 4 到 17，故共有 $14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=105$ 種送法。

【參考解法 2】

若每間分店都先分 3 本書，則還有 16 本書要分別送給這三間分店且每間分店至少要送 1 本書，接著可將這 16 本書排成一列，此時共 15 個空隙，從中選取 2 個空隙插入木棒而分成三堆，共有 $\frac{15 \times 14}{2} = 105$ 種分法。

答：105 種

9. 若將一個四位數的數碼依相反順序寫出而得到一個新的四位數，且其值增加 6354。請問原來這個四位數的最大值是多少？

【參考解法】

令 \overline{abcd} 為好數。則知 $\overline{dcba} - \overline{abcd} = 6354$ ，即

$$(1000d + 100c + 10b + a) - (1000a + 100b + 10c + d) = 6354$$

$$999(d - a) + 90(c - b) = 9 \times 706$$

$$111(d - a) + 10(c - b) = 706$$

$$c - b = \frac{706 - 111(d - a)}{10}$$

因 a 、 b 、 c 、 d 皆為數碼且 a 、 d 不可為 0，所以 $c-b$ 、 $d-a$ 皆小於 9，因此僅可取 $d-a=6$ ，此時 $c-b=4$ 。要求這個四位數的最大值，由此 a 的值要儘量大。故 (a, d) 的取值為 $(3, 9)$ 。而 b 的值要儘量大，故 (b, c) 的取值為 $(5, 9)$ ，因此可判斷出這個四位數的最大值為 3599。

答：3599

10. 在 1000×1000 、 1001×1001 、 1002×1002 、...、 2018×2018 這些數中，請問有多少個數的十位數碼是偶數？

【參考解法】

若將一個數寫成 $10A+b$ 的形式時，其中 b 為個位數碼，則這個數的完全平方數為 $100A^2+20\times Ab+b^2$ ，可判斷出 $100A^2$ 的十位數碼為0、 $20\times Ab$ 的十位數恆為偶數，故最後這個值的十位數是由數碼 b 的平方之十位數碼所決定。因此僅當 b 為4、6時，它們的完全平方數的十位數為奇數而其餘情況為偶數。因1000~2018這1019個數中，共有204個數的個位數碼為4或6，因此共有 $1019-204=815$ 個數的十位數碼是偶數。

答：815 個

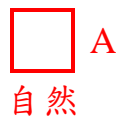
11. 四位老師圍著一張四方形的餐桌吃飯，每人恰各坐在四邊形的一邊上，其中A與B為女老師、X與Y為男老師。四個老師分別教自然、數學、音樂、國語。自然老師坐在A的左邊、數學老師坐在X的對面，B與Y坐在隔壁，音樂老師左邊坐的是一位女老師。請問誰是音樂老師？（用A、B、X或Y作答）

【參考解法 1】

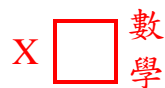
因自然老師坐在A的左邊，所以A不是自然老師。若A是數學老師，則A的對面是X，此時B必坐在Y的對面，與B和Y坐在隔壁的事實矛盾；若A是音樂老師，則自然老師是B、A的對面是Y，故A的右邊是X，即X的對面是B，因此B是數學老師，與自然老師是B矛盾。故A是國語老師。此時X必為自然老師、A的右手邊坐的是數學老師、A的對面是音樂老師。因音樂老師左邊坐的是一位女老師，故B是數學老師而Y是音樂老師。

【參考解法 2】

不妨假設四位老師的位置分別是東、西、南、北，且A坐在東邊，則自然老師坐在南邊：



此時數學老師與X只能是以下幾種可能坐法之一：
情況(i)：



由題意可判斷出此時的坐法為：



此與題設B與Y坐在隔壁矛盾。

情況(ii)：

數學

X

由題意可判斷出此時的坐法為：

數學
 A
X：自然老師

由題設知音樂老師左邊做的是一位女老師，因此坐法只可能為：

B：數學老師
音樂 A
X：自然老師

最後由題設 B 與 Y 坐在隔壁可判斷出四位老師的坐法為：

B：數學老師
Y：音樂老師 A：國語老師
X：自然老師

即音樂老師是 Y。

答：Y

12. 將 1、2、3、...、2018 共 2018 個正整數寫在黑板上。請問至少要擦掉幾個數才能使得留在黑板上全部的數之乘積的個位數碼是 2？

【參考解法】

因為 5 的倍數之個位數碼必為 0 或 5，故黑板上 5 的倍數一定要全部擦掉；現因 $2018 = 5 \times 403 + 3$ ，所以至少要擦掉 403 個數。若多寫上 2019，則此時黑板上所有數的乘積之個位數碼必恰是 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$ 之個位數碼的若干次方之個位數碼；而可觀察出 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$ 之積的個位數碼為 6，故此時黑板上的數之個位數碼為 6 的若干次方之個位數碼，即此時黑板上的數之乘積的個位數碼為 6，因此實際上只寫到 2018 時的乘積之個位數碼為 4。若再擦去 2 則可能使此乘積的個位數碼為 2 或 7，但因為此乘積必為 4 的倍數，故末二位數碼為 04、24、44、64 或 84，因此只要再擦去 2 即可保證黑板上的數之乘積的個位數碼為 2，故至少需擦去 $403 + 1 = 404$ 個數。

答：404 個