

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2018 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第一試：應用題 (考試時間 90 分鐘)

_____ 縣市 _____ 國民小學 _____ 年級 編號：_____ 姓名：_____ 性別：_____

請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。

本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 5 分，共 60 分

1. 一個正數去掉小數部分後得到一個整數，將這個整數加上原來的正數所得之和，再乘以 5，最後得到 22.1。請問原來這個正數是多少？

【參考解法】

可知原來的正數與其整數部分相加所得之和為 $22.1 \div 5 = 4.42$ ，因此原來的正數之小數部分為 0.42，且整數部分為 $4 \div 2 = 2$ ，所以原來這個正數是 2.42。

答案：2.42

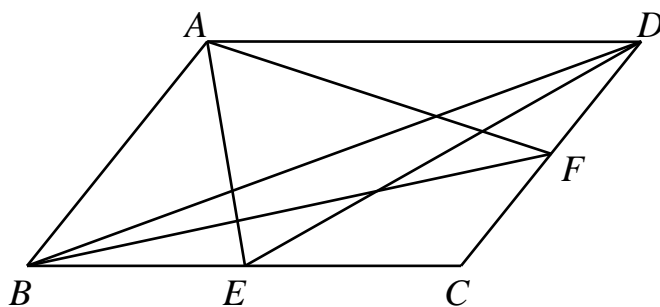
2. 箱子內有大小完全相同的黑色小球 7 顆、白色小球 5 顆、紅色小球 8 顆。從箱子內依次取出小球且不再放回箱子內，請問至少需要取出多少顆小球，才能保證取出黑、白、紅三種顏色的小球至少都各有 1 顆？

【參考解法】

為了保證取出三種顏色的球，最壞的情況是先取完數量較多的兩種顏色的小球，即黑球與紅球，共有 $7 + 8 = 15$ 顆，再取出一顆球即可保證取出三種顏色的小球，故至少需要取出 $15 + 1 = 16$ 個小球。

答案：16 顆

3. 在平行四邊形 $ABCD$ 中，點 E 、 F 分別為 BC 、 CD 的中點。分別連接 AE 、 AF 、 DE 、 BF 、 BD ，如下圖所示。若平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 4 cm^2 ，請問圖中以點 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 中三個點為頂點、以現有的線段為邊且面積為 1 cm^2 的三角形共有多少個？



【參考解法】

可知圖中的三角形有 ABD 、 ABE 、 ABF 、 ADE 、 ADF 、 BCD 、 BCF 、 BDE 、 BDF 、 CDE 共 10 個三角形，由平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 4 cm^2 可知：

(i) 三角形 ABD 、 ABF 、 ADE 、 BCD 的面積為 $\frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ cm}^2$ ；

(ii) 因點 E 為 BC 的中點，故三角形 ABE 、 CDE 、 BDE 的面積為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = 1 \text{ cm}^2$ ；

(iii) 因點 F 為 CD 的中點，故三角形 ADF 、 BCF 、 BDF 的面積為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = 1 \text{ cm}^2$ 。

故圖中面積為 1 cm^2 的三角形總共有 6 個。

答案：6 個

4. 一張圓桌有 20 個座位，其中有些座位已經有人入坐。此時若新來一個人，他無論坐在哪個空位，都至少有一個已入坐的人與他相鄰，即他們之間沒有空著的座位，請問原來至少有多少個座位已經有人入坐？

【參考解法】

由題意可知，原來僅隔著空座位的兩個人之間最多有 2 個空座位，因此 3 個依次相鄰的座位至少有 1 個座位已有人入坐。因 $20 = 3 \times 6 + 2$ ，所以原來至少有 $6 + 1 = 7$ 個座位已經有人入坐。

答案：7 個

5. 某工廠生產一批零件。若每小時比原來計畫的生產速度多生產 4 個零件，則所用的時間比原預估的時間少 $\frac{1}{10}$ ；若每小時比原來計畫的生產速度少生產 6 個零件，則所用時間比原預估的時間多 $\frac{1}{5}$ 。請問該工廠原來計畫的生產速度是每小時生產多少個零件？

【參考解法 1】

設該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 v 個零件且原預估的時間為 t 小時。則由題意可知

$$(v+4)\left(1-\frac{1}{10}\right)t = (v-6)\left(1+\frac{1}{5}\right)t$$

$$\frac{9}{10}(v+4) = \frac{6}{5}(v-6)$$

$$9(v+4) = 12(v-6)$$

$$12v - 9v = 9 \times 4 + 12 \times 6$$

$$3v = 108$$

$$v = 36$$

所以該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 36 個零件。

【參考解法 2】

每小時比原來計畫的生產速度多生產 4 個零件的情況比每小時比原來計畫的生產速度少生產 6 個零件的情況每小時多生產了 10 個零件，且所花費的時間比為

$\frac{1 - \frac{1}{10}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{6}{5}} = \frac{3}{4}$ ，即可判斷出在每小時比原來計畫的生產速度多生產 4 個零件的

情況下，每小時生產 $10 \div \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 40$ 個零件，在每小時比原來計畫的生產速度少生產 6 個零件的情況下，每小時生產 $40 - 10 = 30$ 個零件，因此該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 $40 - 4 = 30 + 6 = 36$ 個零件。

【參考解法 3】

可知生產速度與生產時間成反比，故若設該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 v 個零件，則由題意可得知：

$$\begin{aligned}\frac{v}{v+4} &= \frac{9}{10} \\ 9v+36 &= 10v \\ v &= 36\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\frac{v}{v-6} &= \frac{6}{5} \\ 6v-36 &= 5v \\ v &= 36\end{aligned}$$

所以該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 36 個零件。

答案：36 個

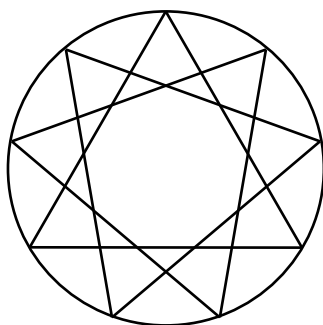
6. 在所有數碼和恰為 2018 的數中，請問最小的數之首位數碼是多少？

【參考解法】

可知此最小的數會發生在該數有最多個數碼 9 時，且其首位數碼為 2018 除以 9 之後所得的餘數。2018 的數碼和為 11，故 2018 除以 9 之後所得的餘數與 11 除以 9 之後所得的餘數相同，即 2。事實上，因 $2018 = 9 \times 224 + 2$ ，故此最小的數為 $\underbrace{299\dots9}_{224\text{個}}$ 。

答：2

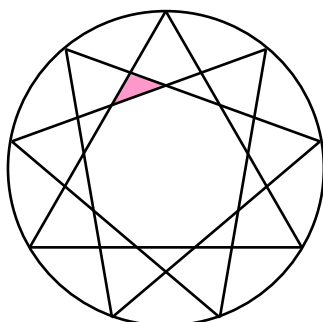
7. 將圓內的一個內接正三角形分別以順時針、逆時針各旋轉 40° ，如圖所示。請問圖中總共有多少個在不同位置的三角形？



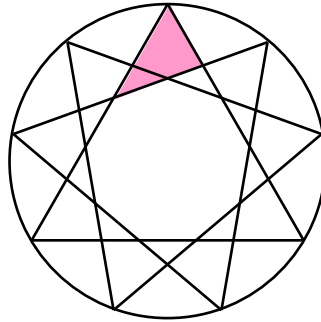
【參考解法】

觀察可知

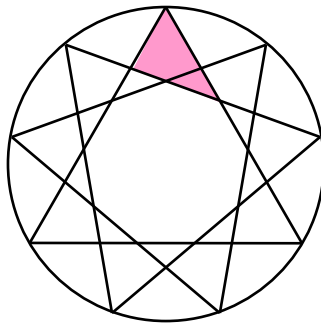
(i) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



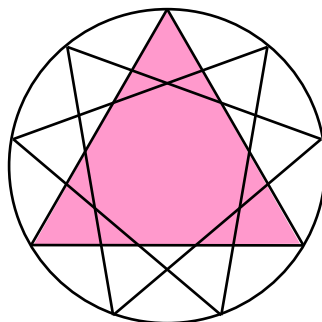
(ii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



(iii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



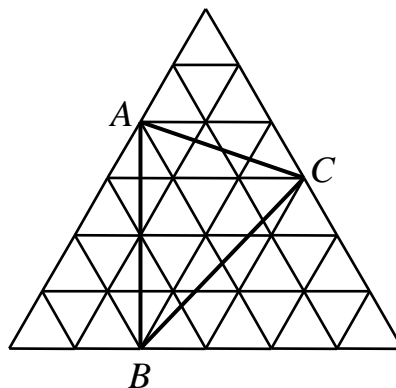
(iv) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 3 個：



因此圖中總共有 $9+9+9+3=30$ 個不在相同位置的三角形。

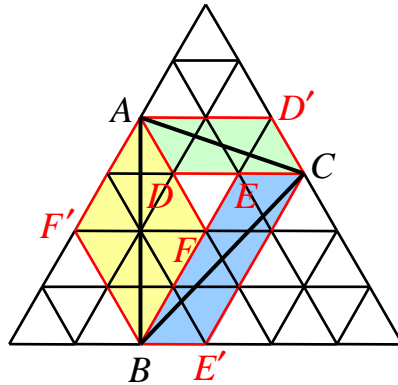
答案：30 個

8. 將 36 個面積為 1 cm^2 的小等邊三角形拼成一個大等邊三角形，如下圖所示。請問圖中三角形 ABC 的面積是多少 cm^2 ？



【參考解法 1】

如圖所示之方式標記點 D 、 D' 、 E 、 E' 、 F 、 F' ，則三角形 ABC 被分割成三角形 ADC 、 BEC 、 AFB 、 DEF 。



注意到：

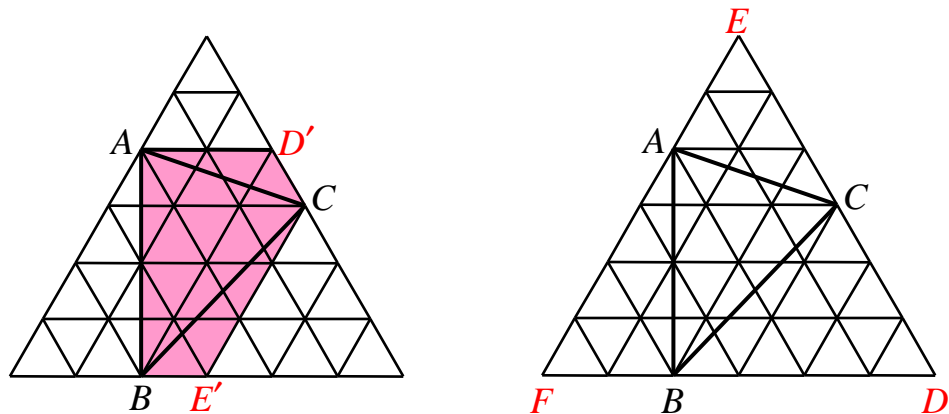
- (i) 三角形 DEF 面積為 1 cm^2 ；
- (ii) 三角形 ADC 面積為平行四邊形 $ADCD'$ 面積的一半，而平行四邊形 $ADCD'$ 是由 4 個小正三角形拼成，故三角形 ADC 面積為 $\frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ cm}^2$ ；
- (iii) 三角形 BEC 面積為平行四邊形 $BE'CE$ 面積的一半，而平行四邊形 $BE'CE$ 是由 6 個小正三角形拼成，故三角形 BEC 面積為 $\frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}^2$ ；
- (iv) 三角形 AFB 面積為平行四邊形 $AFBF'$ 面積的一半，而平行四邊形 $AFBF'$ 是由 8 個小正三角形拼成，故三角形 AFB 面積為 $\frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}^2$ 。

所以三角形 ABC 的面積為 $1+2+3+4=10 \text{ cm}^2$ 。

【參考解法 2】

如下圖左所示之方式標記點 D' 、 E' ，則三角形 ABC 、 ACD' 、 BCE' 拼成五邊形 $ABE'CD'$ ，而觀察知五邊形 $ABE'CD'$ 是由 13 個完整的小正三角形與 4 個被切為一半的小正三角形所拼成，故五邊形 $ABE'CD'$ 的面積為 $13 \times 1 + 4 \times \frac{1}{2} = 15 \text{ cm}^2$ 。

由【參考解法 1】可判斷出三角形 ACD' 、 BCE' 的面積分別為 2 cm^2 、 3 cm^2 ，因此三角形 ABC 的面積為 $15 - 2 - 3 = 10 \text{ cm}^2$ 。



【參考解法 3】

如上圖右所示之方式標記點 D 、 E 、 F ，則三角形 DEF 的面積為 36 cm^2 。注意到

$$AE = \frac{1}{3}EF, AF = \frac{2}{3}EF, FB = \frac{1}{3}FD, BD = \frac{2}{3}FD, CE = CD = \frac{1}{2}DE,$$

故由共角定理可知三角形 ACE 的面積為 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 36 = 6 \text{ cm}^2$ 、三角形 AFB 的面積為

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 36 = 8 \text{ cm}^2、三角形 CDE 的面積為 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 36 = 12 \text{ cm}^2$ ，因此三角形 ABC 的$$

面積為 $36 - 6 - 8 - 12 = 10 \text{ cm}^2$ 。

答案： 10 cm^2

9. 若一個三位數可以被 6 整除，且將它的十位碼與個位碼交換後所得到的三位數也可以被 6 整除，我們稱這樣的三位數為「幸運數」。請問總共有多少個不同的「幸運數」？

【參考解法】

被 6 整除等價於同時可被 2 與 3 整除，故知「幸運數」的末兩位數碼均為偶數，且三個數碼之和可被 3 整除。在「幸運數」的末兩位數碼中，每一位都可選擇 0、2、4、6、8 共有 5 種選法。而在非零數碼中，被 3 除之後餘數為 1 的數共有 1、4、7 這三個數、被 3 除之後餘數為 2 的數共有 2、5、8 這三個數、被 3 除之後餘數為 0 的數共有 3、6、9 這三個數，因此當末兩位數碼選定並得知它們的數碼和除以 3 的餘數後，選擇首位數碼時都有 3 種選法使得三個數碼之和可被 3 整除。故不同的「幸運數」總共有 $5 \times 5 \times 3 = 75$ 個。

答案：75 個

10. 請問同時可以寫成連續 7 個正整數之和、9 個正整數之和、11 個正整數之和與 13 個正整數之和的最大五位數是多少？

【參考解法】

可知一個數可寫成連續的 7 個正整數之和必為 7 的倍數、可寫成連續的 9 個正整數之和必為 9 的倍數、可寫成連續的 11 個正整數之和必為 11 的倍數、可寫成連續的 13 個正整數之和必為 13 的倍數，因此這個數一定是 7、9、11 與 13 的公倍數。因 7、9、11、13 的最小公倍數為 9009，而 9009 的倍數中，最大五位數為 99099，故所求之數為 99099。

答：99099

11. 文具店販賣的原子筆與毛筆都是整數元。已知 65 枝原子筆的總價比 25 枝毛筆的總價多但比 26 枝毛筆的總價少。請問 1 枝原子筆與 1 枝毛筆的總價至少為多少元？

【參考解法 1】

假設 1 枝原子筆的價錢為 a 元、1 枝毛筆的價錢為 b 元，則有 $25b < 65a < 26b$ 。由 $25b < 65a$ 得 $5b < 13a$ ，即 $5b + 1 \leq 13a$ ；由 $65a < 26b$ 得 $5a < 2b$ ，即 $5a \leq 2b - 1$ 。因此 $25b + 5 \leq 65a \leq 26b - 13$ ，即可判斷出 $b \geq 18$ 且據此知 $5 \times 18 + 1 = 91 \leq 13a$ ，即 $a \geq 7$ 。所以 $a + b \geq 7 + 18 = 25$ 。

【參考解法 2】

假設 1 枝原子筆的價錢為 a 元、1 枝毛筆的價錢為 b 元，則有 $25b < 65a < 26b$ 。

將 $25b < 65a$ 兩邊同除以 $25a$ 可得 $\frac{b}{a} < \frac{65}{25} = \frac{13}{5}$ ；將 $65a < 26b$ 兩邊同除以 $26a$ 可得

$\frac{b}{a} > \frac{65}{26} = \frac{5}{2}$ 。因此 $\frac{5}{2} < \frac{b}{a} < \frac{13}{5}$ ，故 $\frac{b}{a} \sim \frac{5+13}{2+5} = \frac{18}{7}$ ；

若 $a=6$ ，則 $b > 15$ ，此時 $\frac{b}{a} \geq \frac{16}{6} = \frac{80}{30} > \frac{78}{30} = \frac{13}{5}$ ，故不合；

若 $a=5$ ，則 $b \geq 13$ ，此時 $\frac{b}{a} \geq \frac{13}{5}$ ，故不合；

若 $a=4$ ，則 $b > 10$ ，此時 $\frac{b}{a} \geq \frac{11}{4} = \frac{55}{20} > \frac{52}{20} = \frac{13}{5}$ ，故不合；

若 $a=3$ ，則 $b \geq 8$ ，此時 $\frac{b}{a} \geq \frac{8}{3} = \frac{40}{15} > \frac{39}{15} = \frac{13}{5}$ ，故不合；

若 $a=2$ ，則 $b > 5$ ，此時 $\frac{b}{a} \geq \frac{6}{2} = 3 > \frac{13}{5}$ ，故不合；

若 $a \geq 8$ ，則 $b > 20$ ，此時 $a+b > 28$ ；

若 $a=7$ ，則 $b=18$ ，此時 $a+b=25$ 。

故知 1 枝原子筆與 1 枝毛筆的總價至少為 25 元。

答：25 元

12. 在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ 、 $AB = 3\text{cm}$ 、 $CD = 9\text{cm}$ 且點 E 、 F 分別位於底邊 CD 與直角邊 BC 上，如下圖所示。若 $BF = 2\text{cm}$ 且 AE 、 EF 將梯形面積三等分，請問直角梯形 $ABCD$ 的面積是多少 cm^2 ？

【參考解法】

在三角形 ADE 中， DE 邊上的高之長度與 BC 之長度相同且三角形 ADE 面積等於梯形 $ABCD$ 面積的三分之

一，故由面積關係可判斷出 $\frac{\frac{1}{2}DE \times BC}{\frac{1}{2}(AB + CD) \times BC} = \frac{1}{3}$ ，即

$DE = \frac{1}{3}(AB + CD) = 4\text{cm}$ ，且由此可知 $CE = CD - DE = 5\text{cm}$ 。接著由三角形 ADE

面積與三角形 CEF 相等可知 $\frac{1}{2}DE \times BC = \frac{1}{2}CE \times CF$ ，將 DE 、 CE 長度代入並化

簡可得 $CF = \frac{4}{5}BC$ 。因 $BF = BC - CF = \frac{1}{5}BC$ 且 $BF = 2\text{cm}$ ，故 $BC = 10\text{cm}$ ，因此

直角梯形 $ABCD$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times (AB + CD) \times BC = \frac{1}{2} \times (3 + 9) \times 10 = 60\text{cm}^2$ 。

答案：60 cm^2

