2018 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第　一　試：應　用　題 (考試時間 90 分鐘)

______縣市______國民小學__年級　編號：______姓名：__________性別：__

請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。
本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 5 分，共 60 分

1. 一個正數去掉小數部分後得到一個整數，將這個整數加上原來的正數所得之和，再乘以 5，最後得到 22.1。請問原來這個正數是多少？

【參考解法】

可知原來的正數與其整數部分相加所得之和為 $22.1\div5=4.42$，因此原來的正數之小數部分為 0.42，且整數部分為 $4\div2=2$，所以原來這個正數是 2.42。

答案：2.42

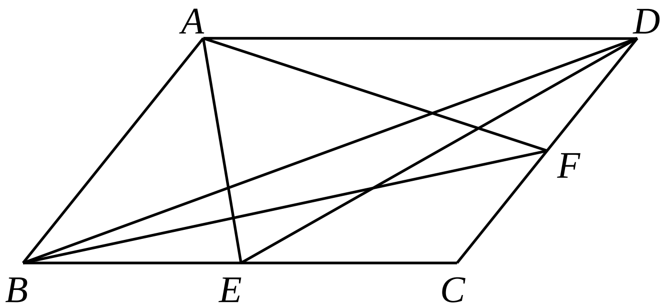
2. 箱子內有大小完全相同的黑色小球 7 顆、白色小球 5 顆、紅色小球 8 顆。從箱子內依次取出小球且不再放回箱子內，請問至少需要取出多少顆小球，才能保證取出黑、白、紅三種顏色的小球至少都各有 1 顆？

【參考解法】

為了保證取出三種顏色的球，最壞的情況是先取完數量較多的兩種顏色的小球，即黑球與紅球，共有 $7+8=15$ 顆，再取出一顆球即可保證取出三種顏色的小球，故至少需要取出 $15+1=16$ 個小球。

答案：16 顆

3. 在平行四邊形 $ABCD$ 中，點 E、F 分別為 BC、CD 的中點。分別連接 AE、AF、DE、BF、BD，如下圖所示。若平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 4 cm^2，請問圖中以點 A、B、C、D、E、F 中三個點為頂點、以現有的線段為邊且面積為 1 cm^2 的三角形共有多少個？



【參考解法】

可知圖中的三角形有 ABD、ABE、ABF、ADE、ADF、BCD、BCF、BDE、BDF、CDE 共 10 個三角形，由平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 4 cm^2 可知：

(i) 三角形 ABD、ABF、ADE、BCD 的面積為 $\frac{1}{2}\times4=2\text{cm}^2$；

(ii) 因點 E 為 BC 的中點，故三角形 ABE、CDE、BDE 的面積為 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4=1\text{cm}^2$；

(iii) 因點 F 為 CD 的中點，故三角形 ADF、BCF、BDF 的面積為 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4=1\text{cm}^2$。

故圖中面積為 1 cm^2 的三角形總共有 6 個。

答案：6 個

4. 一張圓桌有 20 個座位，其中有些座位已經有人入坐。此時若新來一個人，他無論坐在哪個空位，都至少有一個已入坐的人與他相鄰，即他們之間沒有空著的座位，請問原來至少有多少個座位已經有人入坐？

【參考解法】

由題意可知，原來僅隔著空座位的兩個人之間最多有 2 個空座位，因此 3 個依次相鄰的座位至少有 1 個座位已有人入坐。因 $20=3\times6+2$，所以原來至少有 $6+1=7$ 個座位已經有人入坐。

答案：7 個

5. 某工廠生產一批零件。若每小時比原來計畫的生產速度多生產 4 個零件，則所用的時間比原預估的時間少 $\frac{1}{10}$；若每小時比原來計畫的生產速度少生產 6 個零件，則所用時間比原預估的時間多 $\frac{1}{5}$。請問該工廠原來計畫的生產速度是每小時生產多少個零件？

【參考解法 1】

設該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 v 個零件且原預估的時間為 t 小時。則由題意可知

$$(v+4)(1-\frac{1}{10})t=(v-6)(1+\frac{1}{5})t$$

$$\frac{9}{10}(v+4)=\frac{6}{5}(v-6)$$

$$9(v+4)=12(v-6)$$

$$12v-9v=9\times4+12\times6$$

$$3v=108$$

$$v=36$$

所以該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 36 個零件。

【參考解法 2】

每小時比原來計畫的生產速度多生產 4 個零件的情況比每小時比原來計畫的生產速度少生產 6 個零件的情況每小時多生產了 10 個零件，且所花費的時間比為 $\dfrac{1-\frac{1}{10}}{1+\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{6}{5}}=\dfrac{3}{4}$，即可判斷出在每小時比原來計畫的生產速度多生產 4 個零件的情況下，每小時生產 $10\div(1-\frac{3}{4})=40$ 個零件，在每小時比原來計畫的生產速度少生產 6 個零件的情況下，每小時生產 $40-10=30$ 個零件，因此該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 $40-4=30+6=36$ 個零件。

【參考解法 3】
可知生產速度與生產時間成反比，故若設該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 v 個零件，則由題意可得知：

$$\begin{aligned}\frac{v}{v+4}&=\frac{9}{10}\\ 9v+36&=10v\\ v&=36\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\frac{v}{v-6}&=\frac{6}{5}\\ 6v-36&=5v\\ v&=36\end{aligned}$$

所以該工廠原來計畫的每小時生產速度是生產 36 個零件。

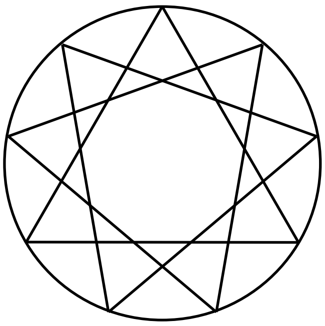
答案：36 個

6. 在所有數碼和恰為 2018 的數中，請問最小的數之首位數碼是多少？

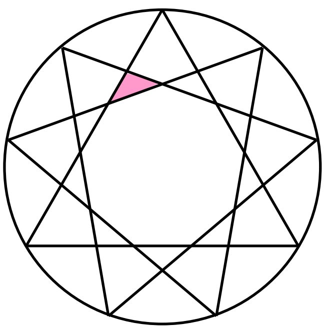
【參考解法】
可知此最小的數會發生在該數有最多個數碼 9 時，且其首位數碼為 2018 除以 9 之後所得的餘數。2018 的數碼和為 11，故 2018 除以 9 之後所得的餘數與 11 除以 9 之後所得的餘數相同，即 2。事實上，因 $2018=9\times224+2$，故此最小的數為 $2\underbrace{99\cdots9}_{224\text{個}}$。

答：2

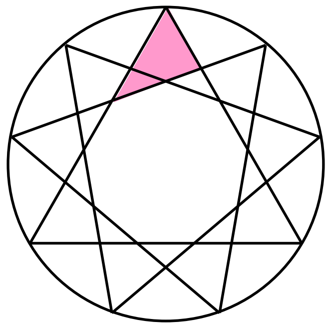
7. 將圓內的一個內接正三角形分別以順時針、逆時針各旋轉 40°，如圖所示。請問圖中總共有多少個在不同位置的三角形？



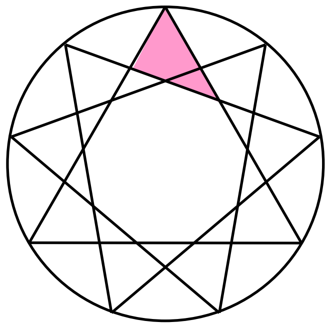
【參考解法】
觀察可知
(i) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



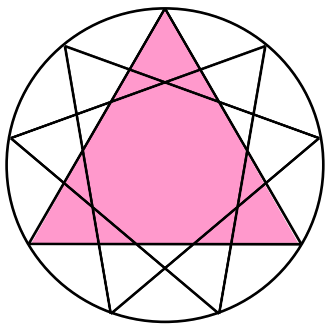
(ii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



(iii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



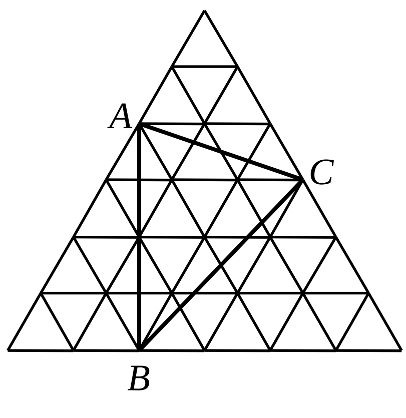
(iv) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 3 個：



因此圖中總共有 $9+9+9+3=30$ 個不在相同位置的三角形。

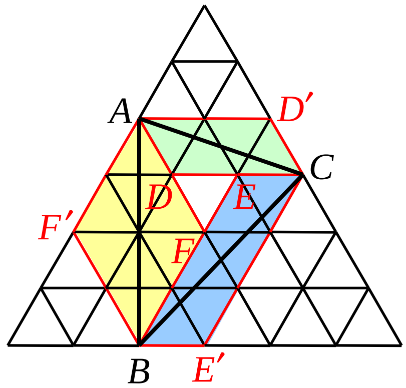
答案：30 個

8. 將 36 個面積為 1 cm^2 的小等邊三角形拼成一個大等邊三角形，如下圖所示。請問圖中三角形 ABC 的面積是多少 cm^2？



【參考解法 1】

如圖所示之方式標記點 D、D'、E、E'、F、F'，則三角形 ABC 被分割成三角形 ADC、BEC、AFB、DEF。



注意到：

(i) 三角形 DEF 面積為 1 cm^2；

(ii) 三角形 ADC 面積為平行四邊形 $ADCD'$ 面積的一半，而平行四邊形 $ADCD'$ 是由 4 個小正三角形拼成，故三角形 ADC 面積為 $\frac{1}{2}\times4=2\ \ \text{cm}^2$；

(iii) 三角形 BEC 面積為平行四邊形 $BE'CE$ 面積的一半，而平行四邊形 $BE'CE$ 是由 6 個小正三角形拼成，故三角形 BEC 面積為 $\frac{1}{2}\times6=3\ \ \text{cm}^2$；

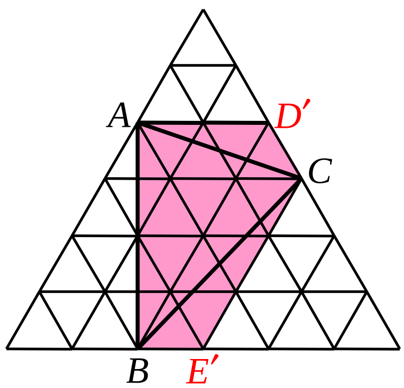
(iv) 三角形 AFB 面積為平行四邊形 $AFBF'$ 面積的一半，而平行四邊形 $AFBF'$ 是由 8 個小正三角形拼成，故三角形 AFB 面積為 $\frac{1}{2}\times8=4\ \ \text{cm}^2$。

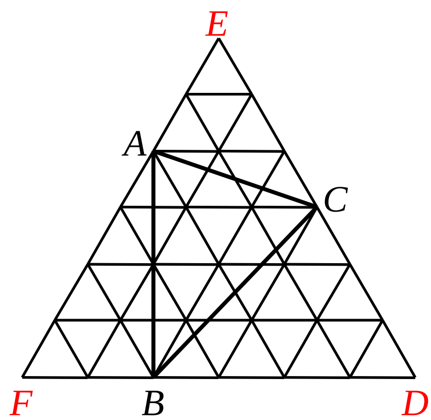
所以三角形 ABC 的面積為 $1+2+3+4=10\ \ \text{cm}^2$。

【參考解法 2】

如下圖左所示之方式標記點 D'、E'，則三角形 ABC、ACD'、BCE' 拼成五邊形 $ABE'CD'$，而觀察知五邊形 $ABE'CD'$ 是由 13 個完整的小正三角形與 4 個被切為一半的小正三角形所拼成，故五邊形 $ABE'CD'$ 的面積為 $13\times1+4\times\frac{1}{2}=15\ \ \text{cm}^2$。

由【參考解法 1】可判斷出三角形 ACD'、BCE' 的面積分別為 2 cm^2、3 cm^2，因此三角形 ABC 的面積為 $15-2-3=10\ \ \text{cm}^2$。





【參考解法 3】

如上圖右所示之方式標記點 D、E、F，則三角形 DEF 的面積為 36 cm^2。注意到 $AE=\frac{1}{3}EF$、$AF=\frac{2}{3}EF$、$FB=\frac{1}{3}FD$、$BD=\frac{2}{3}FD$、$CE=CD=\frac{1}{2}DE$，故由共角定理可知三角形 ACE 的面積為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 36=6\text{ cm}^2$、三角形 AFB 的面積為 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 36=8\text{ cm}^2$、三角形 ACE 的面積為 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 36=12\text{ cm}^2$，因此三角形 ABC 的面積為 $36-6-8-12=10\ \text{cm}^2$。

答案：$10\ \text{cm}^2$

9. 若一個三位數可以被 6 整除，且將它的十位碼與個位碼交換後所得到的三位數也可以被 6 整除，我們稱這樣的三位數為「幸運數」。請問總共有多少個不同的「幸運數」？

【參考解法】

被 6 整除等價於同時可被 2 與 3 整除，故知「幸運數」的末兩位數碼均為偶數，且三個數碼之和可被 3 整除。在「幸運數」的末兩位數碼中，每一位都可選擇 0、2、4、6、8 共有 5 種選法。而在非零數碼中，被 3 除之後餘數為 1 的數共有 1、4、7 這三個數、被 3 除之後餘數為 2 的數共有 2、5、8 這三個數、被 3 除之後餘數為 0 的數共有 3、6、9 這三個數，因此當末兩位數碼選定並得知它們的數碼和除以 3 的餘數後，選擇首位數碼時都有 3 種選法使得三個數碼之和可被 3 整除。故不同的「幸運數」總共有 $5\times5\times3=75$ 個。

答案：75 個

10. 請問同時可以寫成連續 7 個正整數之和、9 個正整數之和、11 個正整數之和與 13 個正整數之和的最大五位數是多少？

【參考解法】

可知一個數可寫成連續的 7 個正整數之和必為 7 的倍數、可寫成連續的 9 個正整數之和必為 9 的倍數、可寫成連續的 11 個正整數之和必為 11 的倍數、可寫成連續的 13 個正整數之和必為 13 的倍數，因此這個數一定是 7、9、11 與 13 的公倍數。因 7、9、11、13 的最小公倍數為 9009，而 9009 的倍數中，最大五位數為 99099，故所求之數為 99099。

答：99099

11. 文具店販賣的原子筆與毛筆都是整數元。已知 65 枝原子筆的總價比 25 枝毛筆的總價多但比 26 枝毛筆的總價少。請問 1 枝原子筆與 1 枝毛筆的總價至少為多少元？

【參考解法 1】

假設 1 枝原子筆的價錢為 a 元、1 枝毛筆的價錢為 b 元，則有 $25b<65a<26b$。由 $25b<65a$ 得 $5b<13a$，即 $5b+1\le 13a$；由 $65a<26b$ 得 $5a<2b$，即 $5a\le 2b-1$。因此 $25b+5\le 65a\le 26b-13$，即可判斷出 $b\ge 18$ 且據此知 $5\times18+1=91\le 13a$，即 $a\ge 7$。所以 $a+b\ge 7+18=25$。

【參考解法 2】

假設 1 枝原子筆的價錢為 a 元、1 枝毛筆的價錢為 b 元，則有 $25b<65a<26b$。

將 $25b<65a$ 兩邊同除以 $25a$ 可得 $\frac{b}{a}<\frac{65}{25}=\frac{13}{5}$；將 $65a<26b$ 兩邊同除以 $26a$ 可得 $\frac{b}{a}>\frac{65}{26}=\frac{5}{2}$。因此 $\frac{5}{2}<\frac{b}{a}<\frac{13}{5}$，故 $\frac{b}{a}\sim\frac{5+13}{2+5}=\frac{18}{7}$：

若 $a=6$，則 $b>15$，此時 $\frac{b}{a}\geq\frac{16}{6}=\frac{80}{30}>\frac{78}{30}=\frac{13}{5}$，故不合；

若 $a=5$，則 $b\geq13$，此時 $\frac{b}{a}\geq\frac{13}{5}$，故不合；

若 $a=4$，則 $b>10$，此時 $\frac{b}{a}\geq\frac{11}{4}=\frac{55}{20}>\frac{52}{20}=\frac{13}{5}$，故不合；

若 $a=3$，則 $b\geq8$，此時 $\frac{b}{a}\geq\frac{8}{3}=\frac{40}{15}>\frac{39}{15}=\frac{13}{5}$，故不合；

若 $a=2$，則 $b>5$，此時 $\frac{b}{a}\geq\frac{6}{2}=3>\frac{13}{5}$，故不合；

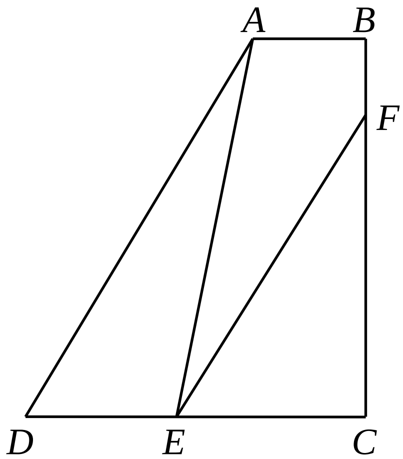
若 $a\geq8$，則 $b>20$，此時 $a+b>28$；

若 $a=7$，則 $b=18$，此時 $a+b=25$。

故知 1 枝原子筆與 1 枝毛筆的總價至少為 25 元。

答：25 元

12. 在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$、$AB=3\,\text{cm}$、$CD=9\,\text{cm}$ 且點 E、F 分別位於底邊 CD 與直角邊 BC 上，如下圖所示。若 $BF=2\,\text{cm}$ 且 AE、EF 將梯形面積三等分，請問直角梯形 $ABCD$ 的面積是多少 cm^2？



【參考解法】

在三角形 ADE 中，DE 邊上的高之長度與 BC 之長度相同且三角形 ADE 面積等於梯形 $ABCD$ 面積的三分之一，故由面積關係可判斷出 $\dfrac{\frac{1}{2}DE\times BC}{\frac{1}{2}(AB+CD)\times BC}=\frac{1}{3}$，即

$DE=\frac{1}{3}(AB+CD)=4\,\text{cm}$，且由此可知 $CE=CD-DE=5\,\text{cm}$。接著由三角形 ADE 面積與三角形 CEF 相等可知 $\frac{1}{2}DE\times BC=\frac{1}{2}CE\times CF$，將 DE、CE 長度代入並化簡可得 $CF=\frac{4}{5}BC$。因 $BF=BC-CF=\frac{1}{5}BC$ 且 $BF=2\,\text{cm}$，故 $BC=10\,\text{cm}$，因此直角梯形 $ABCD$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times(AB+CD)\times BC=\frac{1}{2}(3+9)\times10=60\,\text{cm}^2$。

答案：60 cm^2