注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

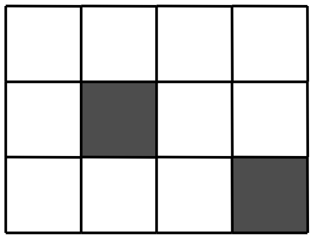
2018 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

______縣市______國民小學__年級　編號：______姓名：__________性別：__

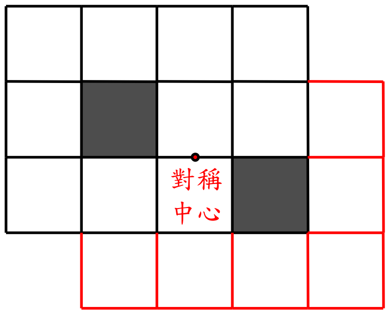
請將答案填入考卷中對應題號的空位內，每一題都必須詳細寫下想法或理由。每題 20 分，共 60 分。

1. 有 12 個大小相同的小正方形拼成一個矩形，其中 10 個為白色、2 個為黑色，如下圖所示。請問至少要再加入多少個同樣大小且僅為白色的小正方形才能使得所得到的圖形是中心對稱的圖案？請畫出這個中心對稱的圖案。



【參考解法】

由於僅有 2 個黑色小正方形，故所得圖形的對稱中心必為這兩個黑色小正方形的對稱中心。(5 分)從而可知在原圖的右方與下方至少總共加入 6 個白色小正方形(5 分)，如圖所示，即可成為中心對稱的圖案。(10 分)



答案： 6 個

2. 有五個正整數排成一列，從第二個數起，每一個數都不小於前一個的兩倍。已知這五個數之和是 2018，請問最後一個數的最小可能值是多少？

【參考解法 1】

設最後一個數為 x，則前四個數依序至多分別為 $\frac{x}{16}$、$\frac{x}{8}$、$\frac{x}{4}$、$\frac{x}{2}$，故

$\frac{x}{16}+\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+x\geq 2018$，(5 分)即 $x\geq\frac{2018\times 16}{31}=1041\frac{17}{31}$，故 $x\geq 1042$。(5 分)

另一方面，將這五個數取為 65、130、260、521、1042 時滿足題目要求(5 分)，故所求為 1042。(5 分)

【參考解法 2】

設第一個數為 x，則當接下來四個數依序分別恰為 $2x$、$4x$、$8x$、$16x$ 時，這五個數之和為 $31x$。(5 分)因 $31\times 65=2015<2018<2046=31\times 66$，故這五個數一定不可能是此情況。但因要找出最後一個數的最小可能值，故第一個數要儘可能地大，此時可判斷出 $x\leq 65$。(5 分)再因 2018 除以 31 後商為 65、餘數為 3 可判斷出當 $x=65$ 時有以下兩種情況：

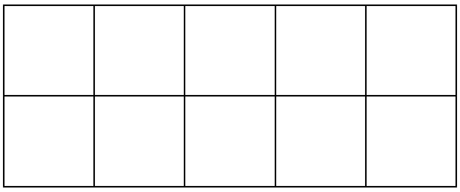
- 65、$2\times 65=130$、$4\times 65=260$、$8\times 65=520$、$16\times 65+3=1043$；(4 分)
- 65、$2\times 65=130$、$4\times 65=260$、$8\times 65+1=521$、$16\times 65+2=1042$(4 分)

故所求為 1042。(2 分)

答案： 1042

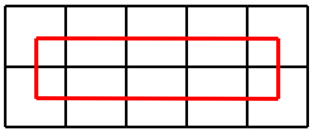
- 若答案為 1043，但討論過程中完全未考慮恰為 2 倍的情況，0 分

3. 在一個2×5的長方形方格表中的 10 個小方格內，恰好不重複地填入 1 到 10 的整數， 而且使得任意二個連續的整數一定是被填入有共同邊的相鄰小方格內。請問總共有多少種不同的填法？

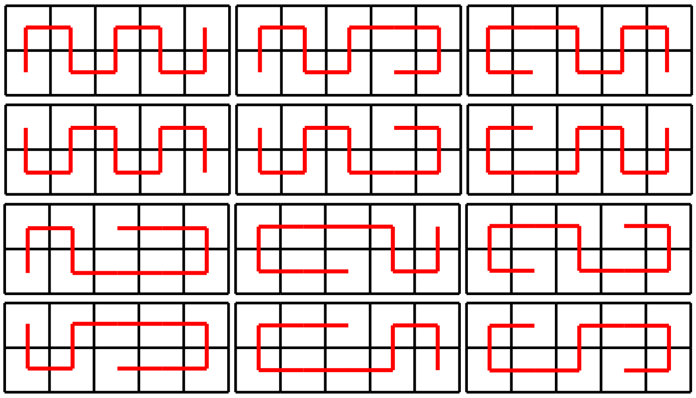


【參考解法 1】

每一個填入數的可行方法可將從一個數到另一個數用一條連續的路徑替代。首先假設 1 與 10 亦相鄰，所以此路徑會連接在一起而成一個圈，如右圖所示。這個圈的的斷點可以在 10 個位置中的任何一個。因此這類的路徑有 10 種。(5 分)



現在假設 1 與 10 不相鄰，所以我們得到一條開口的路徑。我們根據鉛垂的線段有一組、二組、三組而加以分類，其中相鄰的鉛垂線段視為在同一組。注意到除了由圈得到的路徑之外，在兩端的直行上都包含有一條鉛垂線段。對於所有鉛垂線段都在同一組的路徑，此意即每一直行上都必須包含有一條鉛垂線段。如果我們假設左側的端點必須在底下這列上，則這樣的路徑是唯一的，如下圖中的第一個圖所示。對於有二組的鉛垂線段之路徑，我們無法使每一組都至少包含有二條鉛垂線段。另一方面，如果每一組都恰包含有一條鉛垂線段，則我們可得到一個圈的路徑，所以恰有一組恰包含有一條鉛垂線段。接著假設左側的端點在底下這列上，則我們可得接下來四個圖所示的四條路徑。最後，對於有三組的鉛垂線段之路徑，每一個端點的組恰包含有一條鉛垂線段。此唯一的路徑如最後一圖所示。放開左側的端點在底下這列上的限制，我們共可得 12 條路徑。(10 分)連同從圈所得到的 10 條，總共有 22 條。由於每條路徑可依兩個方向運行，所以有 44 種不同的填數方法。(5 分)

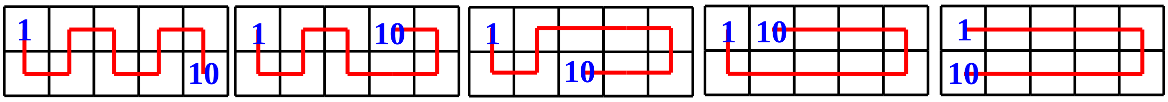


【參考解法 2】

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J

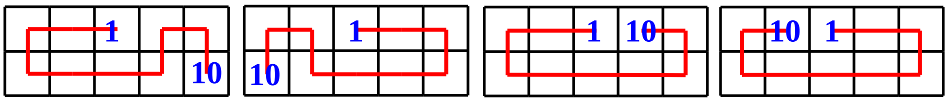
由對稱性可以判斷出 1 的位置有 3 種情況：

- 若 1 在四個角落，不失一般性可假設 1 在 A，則可能的路徑有以下五種：



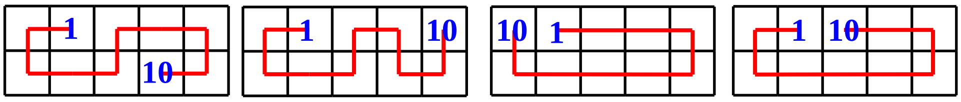
因此這樣子的情況共有 $5\times4=20$ 種填數方法。(6 分)

- 若 1 在最中間的直行，不失一般性可假設 1 在 C，則可能的路徑有以下四種：



因此這樣子的情況共有 $4\times2=8$ 種填數方法。(6 分)

- 若 1 在其餘四個位置，不失一般性可假設 1 在 B，則可能的路徑有以下四種：



因此這樣子的情況共有 $4\times4=16$ 種填數方法。(6 分)

合計共 $20+8+16=44$ 種填數方法。(2 分)

答案： 44 種

若考生計數方法不同且未求得正確數目，依以下規則酌予給分：

- 若分類方式可行但每一類都計數錯誤或未列出路徑，3 分
- 若分成 n 類，每計算出正確數目的一類，$\frac{20}{n}$ 分
- 直接寫路徑而未提出分類方式，若未列出全部的 44 種正確填數方式，0 分