

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2019 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第二 試：綜合能力測驗（考試時間 60 分鐘）

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，每一題都必須詳細寫下想法或理由。
每題 20 分，共 60 分。

1. 已知正整數 a 、 b 滿足 $1 \leq a < b \leq 60$ 且 $a \times b$ 能被 5 整除，請問符合此條件的不同正整數對 (a, b) 總共有多少對？

【參考解法 1】

從 1 到 60 的 60 個數之中，有 12 個數能被 5 整除，有 48 個數不能被 5 整除。(5 分)

若 a 、 b 都能被 5 整除，則可從能被 5 整除的 12 個數中選取二個，將較小的數

當作 a ，將較大的數當作 b ，此情況的數對有 $\frac{12 \times 11}{2} = 66$ 對；(5 分)

若 a 、 b 中只有一個能被 5 整除，則可從能被 5 整除的 12 個數中選取一個，從不能被 5 整除的 48 個數中選取一個，將較小的數當作 a ，將較大的數當作 b ，此情況的數對有 $12 \times 48 = 576$ 對。(5 分)

故符合此條件的不同正整數對 (a, b) 總共有 $66 + 576 = 642$ 對。(5 分)

【參考解法 2】

從 1 到 60 的 60 個數之中，有 12 個數能被 5 整除，有 48 個數不能被 5 整除。(5 分)

全部的正整數對共 $\frac{60 \times 59}{2} = 1770$ 對 (5 分)，其中兩數都不為 5 的倍數之正整數對共

$\frac{48 \times 47}{2} = 1128$ 對 (5 分)，因此符合條件的不同正整數對 (a, b) 總共有 $1770 - 1128 = 642$

對。(5 分)

【參考解法 3】

當 a 為 5 的倍數時， b 可為 $a+1$ 、 $a+2$ 、 \dots 、 60 ，共 $60-a$ 個可能的取值，所以此情況共有 $(60-5) + (60-10) + (60-15) + \dots + (60-55) = 330$ 個不同正整數對；(5 分)

當 b 為 5 的倍數時， a 可為 1 、 2 、 \dots 、 $b-1$ ，共 $b-1$ 個可能的取值，所以此情況共有 $(5-1) + (10-1) + (15-1) + \dots + (60-1) = 378$ 個不同正整數對；(5 分)

若 a 、 b 都能被 5 整除，則可從能被 5 整除的 12 個數中選取二個，將較小的數

當作 a ，將較大的數當作 b ，此情況的數對有 $\frac{12 \times 11}{2} = 66$ 對；(5 分)

因此符合條件的不同正整數對 (a, b) 總共有 $330 + 378 - 66 = 642$ 對。(5 分)

答案：642 對

2. 有一個機器人可以根據使用者的合理指令生成一組數位編碼。小偉提出的指令如下：

(1) 生成的每個編碼均為三位數（最左側的數碼不為 0）；

(2) 任意兩個編碼至多在一個數位上的數碼是對應相同的。

請問這個機器人至多可以生成多少個符合以上指令的編碼？

【參考解法 1】

由題意可知，任兩個編碼至少在兩個數位的數碼是對應不同的。因此，編碼數量不能超過 90 個。因為百位數只能為 1 至 9 這九個數碼，十位數可以為 0 至 9 這十個數碼，從而前面兩位數碼總共可以構成 $9 \times 10 = 90$ 個不同的兩位數。若編碼數量大於或等於 91，由抽屜原理，至少有兩個編碼的前面兩位數碼對應相同，矛盾。(5 分)

現在構造 90 個編碼：前面兩位數碼取遍 10 至 99 這個 90 個號碼，第三位數碼取前面兩位數碼之和的個位數。(5 分)

下面說明這 90 個編碼符合指令。對於任意兩個編碼，若前面兩位數碼已經對應不同，則它們已經滿足要求；若前面兩位數碼只有一個對應不同，另外一個對應相同，則第三位數碼肯定不同。假設後面一種情況第三位數碼相同，不妨設這兩個編碼分別為 \overline{abd} 、 \overline{acd} ，其中 $0 \leq c < b \leq 9$ ，由構造的方法可知，只能是 $a+b = a+c+10$ ，因此 $b-c=10$ ，不可能。所以第三位數碼不同。(10 分)

【參考解法 2】

正確列出所有 90 個符合指令的編碼。(10 分，如有任何一個缺漏或不符合指令一律給 0 分)

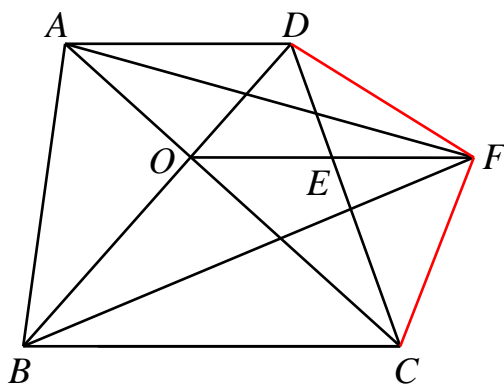
證明至多有 90 個符合指令的編碼。(10 分)

答案：90 個

【評註】

這 90 個編碼也可以這樣構造：前面兩位數碼取遍 10 至 99 這個 90 個號碼，第三位數碼取法為使得所有三個數碼之和為 10 的倍數。若前面兩位數碼只有一個對應不同，另外一個對應相同，則第三位數碼肯定不同。

3. 已知 $ABCD$ 為梯形，邊 AD 平行於 BC ，對角線 AC 與 BD 交於點 O ，過 O 作 OE 平行於 BC 交 CD 於點 E ，且延長 OE 至點 F ，使得 $OE = EF$ ，如圖所示。若 $AD = 6\text{cm}$ 、 $BC = 10\text{cm}$ ，梯形 $ABCD$ 的面積為 64 cm^2 ，請問三角形 ABF 的面積為多少 cm^2 ？



【參考解法 1】

連接 DF 與 CF ，由平行線的性質可知三角形 AOF 與三角形 DOF 的面積相等、三角形 BOF 與三角形 COF 的面積相等，所以四邊形 $AOCF$ 與四邊形 $BOCF$ 的面積相等。由題意可知點 E 是線段 OF 的中點，所以三角形 DOC 與三角形 DCF 的面積相等，因此四邊形 $DOCF$ 面積為三角形 DOC 面積的 2 倍。(5 分)

因為 $\frac{\text{三角形 } ACD \text{ 的面積}}{\text{三角形 } ABC \text{ 的面積}} = \frac{\text{三角形 } ABD \text{ 的面積}}{\text{三角形 } BCD \text{ 的面積}} = \frac{AD}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ，所以三角形 ABD

面積為梯形 $ABCD$ 面積的 $\frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$ 倍，即 $64 \times \frac{3}{8} = 24 \text{ cm}^2$ 。(5分)

由三角形 DOA 與三角形 BOC 相似可知 $\frac{DO}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 。

(或由共邊定理可知 $\frac{DO}{OB} = \frac{\text{三角形 } ACD \text{ 的面積}}{\text{三角形 } ABC \text{ 的面積}} = \frac{3}{5}$)

從而 $\frac{\text{三角形 } ADO \text{ 的面積}}{\text{三角形 } ABO \text{ 的面積}} = \frac{DO}{OB} = \frac{3}{5}$ 。因此

三角形 ABO 面積為三角形 ABD 面積的 $\frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$ 倍，即 $24 \times \frac{5}{8} = 15 \text{ cm}^2$ 。(5分)

由題意可知 $AD \parallel BC$ ，因此三角形 ABD 與三角形 ACD 的面積相等，兩邊同時減去三角形 AOD 的面積後可得知三角形 ABO 與三角形 DOC 的面積相等。

綜上可得，因三角形 ABF 的面積為三角形 ABO 與四邊形 $AOBF$ 的面積和，而四邊形 $AOBF$ 與四邊形 $DOCF$ 的面積相等，且四邊形 $DOCF$ 的面積為三角形 DOC 面積的 2 倍，再因三角形 ABO 與三角形 DOC 的面積相等，故三角形 ABF 的面積為三角形 ABO 面積的 3 倍，即 $15 \times 3 = 45 \text{ cm}^2$ 。(5分)

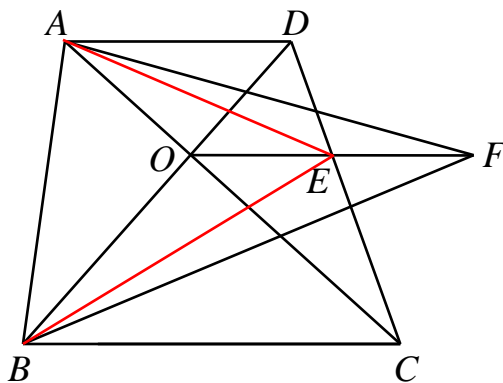
【參考解法 2】

由題意可知 $AD \parallel BC$ ，因此三角形 AOD 與三角形 COB 相似，即

$$\frac{DO}{OB} = \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ 且 } \frac{\text{三角形 } AOD \text{ 的面積}}{\text{三角形 } COB \text{ 的面積}} = \frac{AD^2}{BC^2} = \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{9}{25} \text{。 (5分)}$$

令三角形 AOD 的面積為 $9x$ ，則三角形 COB 的面積為 $25x$ 。而三角形 AOD 與三角形 COB 的面積都是 $9x \times \frac{5}{3} = 15x$ 。

故梯形 $ABCD$ 的面積為 $9x + 25x + 15x + 15x = 64x$ ，即 $x = 1$ 。因此三角形 AOB 、 DOC 的面積都為 15 cm^2 (5分)



連接 AE 與 BE 。由平行線的性質以及 $OE = EF$ 可知三角形 DOE 、 AOE 、 AEF 的面積都相等，即三角形 AOF 面積為三角形 DOE 面積的 2 倍。同樣地，也可以得知三角形 COE 、 BOE 、 BEF 的面積都相等，即三角形 BOF 面積為三角形 COE 面積的 2 倍。(5分)

而三角形 ABF 的面積是三角形 ABO 、 AOF 、 BOF 的面積總和，即為
 $15 + 2 \times (\text{三角形 } DOE \text{ 面積} + \text{三角形 } COE \text{ 面積}) = 15 + 2 \times 15 = 45 \text{ cm}^2$ 。(5分)

【參考解法 3】

由題意可知 $AD \parallel BC$ ，因此三角形 AOD 與三角形 COB 相似，即

$$\frac{DO}{OB} = \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad (5 \text{ 分})$$

因 $AD = 6 \text{ cm}$ 、 $BC = 10 \text{ cm}$ 、梯形 $ABCD$ 的面積為 64 cm^2 ，故梯形的高為
 $\frac{64 \times 2}{6 + 10} = 8 \text{ cm}$ 。接著延長 OF 交 AB 於點 G 。

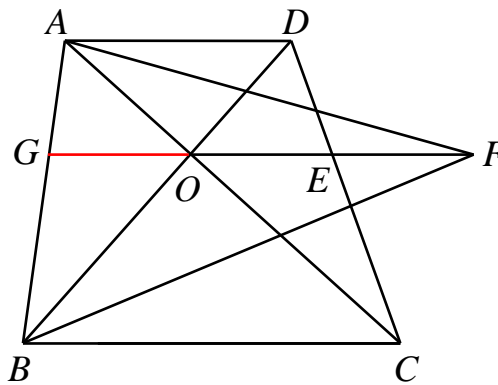
因 $OE \parallel AD$ ，故 $\frac{OE}{AD} = \frac{OC}{AC} = \frac{5}{8}$ ，即可得知 $OE = \frac{5}{8} \times AD = \frac{5}{8} \times 6 = \frac{15}{4} \text{ cm}$ ；

因 $OE = EF$ ，故 $EF = \frac{15}{4} \text{ cm}$ ；(5分)

因 $OG \parallel BC$ ，故 $\frac{OG}{BC} = \frac{AO}{AC} = \frac{3}{8}$ ，即可得知 $OG = \frac{3}{8} \times BC = \frac{3}{8} \times 10 = \frac{15}{4} \text{ cm}$ ；(5分)

故 $GF = OG + OE + EF = \frac{45}{4}$ 。因三角形 ABF 的面積為 $\frac{1}{2} \times 8 \times GF = 4GF$ ，故可知

三角形 ABF 的面積為 $4 \times \frac{45}{4} = 45 \text{ cm}^2$ (5分)。



答案： 45 cm^2