

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

# International Mathematics Tournament of Towns

## 環球城市數學競賽

2002 秋季賽 國中組 初級卷 20 Oct. 2002

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在 2002 個邊的凸多邊形內畫上一些對角線，這些對角線在多邊形內部兩兩互不相交，且將這個多邊形分割為 2000 個三角形。請問在這 2000 個三角形中，是否可能恰有 1000 個三角形，其三個邊都是取自於所畫的對角線？  
(註：連接多邊形內任意二點之線段，若仍全部落在多邊形之內部，則稱此多邊形為凸多邊形。)(四分)
2. 三個聰明的國中生聚在一起玩一個推理的遊戲。小強與小花各選了一個自然數並分別將它告訴小安。小安告訴小強和小花，他將分別把這二個數的和與乘積寫在不同的紙上。小安寫好後，將其中一張紙藏起來，把另一張紙亮出來給小強和小花看（這張紙上寫著 2002）。小安請小強和小花互猜對方所選的數，小強首先宣稱他無法確定小花所選的數，小花聽完小強的話後，也說她無法確定小強所選的數。請問小花所選的數為何？（五分）
3. (a) 在一次考試中，已知至少有三分之二的題目屬於難題。在這些難題中，每一道題至少有三分之二的學生不會作。請問下列情況是否可能發生：至少答對三分之二題數的學生人數不少於全部考生人數的三分之二。（一分）  
(b) 承(a)，若將其中所有的“三分之二”換成“四分之三”呢？（二分）  
(c) 承(a)，若將其中所有的“三分之二”換成“十分之七”呢？（二分）
4. 將 2002 張卡片分別標記  $1, 2, 3, \dots, 2002$  的數，數字面朝上放在桌上。二位玩家輪流自桌上各取一張牌，直到桌上的牌取光為止。先計算每個人所有取的牌的數之總和，再比較這兩個總和的個位數，較大者為勝方。請問兩位玩家中哪一位有必勝之策略（無論對手如何對應）？如果有，這個必勝策略是什麼？（五分）
5. 任意給一個角及其內部一點 A。請問能否畫出三條經過 A 點的直線，使得其中一條線與這個角的兩邊相交的二點，分別是另外二條直線與這個角的同一邊上交點的中點？（五分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》

# International Mathematics Tournament of Towns

## 環球城市數學競賽

2002 秋季賽 高中組 初級卷 20 Oct. 2002

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 三個聰明的國中生聚在一起玩一個推理的遊戲。小強與小花各選了一個自然數並分別將它告訴小安。小安告訴小強和小花，他將分別把這二個數的和與乘積寫在不同的紙上。小安寫好後，將其中一張紙藏起來，把另一張紙亮出來給小強和小花看（這張紙上寫著 2002）。小安請小強和小花互猜對方所選的數，小強首先宣稱他無法確定小花所選的數，小花聽完小強的話後，也說她無法確定小強所選的數。請問小花所選的數為何？（四分）
2. (a) 在一次考試中，已知至少有三分之二的題目屬於難題。在這些難題中，每一道題至少有三分之二的學生不會作。請問下列情況是否可能發生：至少答對三分之二題數的學生人數不少於全部考生人數的三分之二。（一分）  
(b) 承(a)，若將其中所有的“三分之二”換成“四分之三”呢？（二分）  
(c) 承(a)，若將其中所有的“三分之二”換成“十分之七”呢？（二分）
3. 平面有兩兩不平行的直線若干條，它們將平面分割成許多區域。從這些區域的內部任選一點 A。請證明：如果存在一個點 B，對於任意一條直線而言，點 B 都與點 A 不在這條直線的另一側，則點 A 所在的區域是一個無界的區域（即這個區域至少有一個方向沒有邊界）；反之亦成立。（五分）
4. 設  $x, y, z$  為實數，且  $0 < x, y, z < \pi/2$ ，請證明：
$$\frac{x \cos x + y \cos y + z \cos z}{x + y + z} \leq \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3}. \quad (\text{五分})$$
5. 在黑板上任意寫出一個  $n$  位數，再依下列方法操作：將黑板上的數加上這個  $n$  位數中的任意一個非零的數字，得到一個新的數寫在黑板上，再擦去黑板上舊有的數。請證明：照這樣的方法繼續操作下去，經過有限次後，黑板上一定會出現一個偶數。（五分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》