International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2002 秋季賽　國中組　高級卷　27 Oct. 2002

※　每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 已知有 2002 個兩兩相異的數排成一個圓圈，其中任意兩個相鄰的數之差是 2 或 3。請問這 2002 個數中任意兩個數之差的最大可能值是多少？（四分）

2. 有一個正 19999 邊形，在其每個頂點標上 2, 3, 4, …, 20000 中的任意一個數，而且所標的數兩兩都不相同。在每二個頂點的連線上都寫出這二個頂點上的數之最大公因數。若將所有頂點上的數擦掉，只根據遺留下各連線上的數，請問是否可以確定原來各頂點上的數？（五分）

3. 有一個 50 邊形內接於一圓，將此圓分割成 50 個圓弧，其長度都是介於 1 到 50 間的整數，而且弧長兩兩都不相同。已知這 50 個弧滿足下列條件：若二個弧之間相隔 24 個弧，則這二個弧長度之差必為 25。請證明：這 50 邊形至少有兩個邊是互相平行的。（六分）

4. 在ΔABC的內部取一點 P，使得$\angle ABP = \angle ACP$且$\angle CBP = \angle CAP$。請證明：點 P 是ΔABC的三條高的交點。（六分）

5. 在凸 n 多邊形內畫上一些對角線，這些對角線在多邊形內部兩兩不相交，且將此多邊形分割為$n-2$個三角形。把這些三角形的內部塗上紅色或藍色，每個三角形都只塗一種顏色，而且有共同邊的兩個三角形內部所塗的顏色都不相同。請問塗上紅色與藍色三角形的總數量最多相差幾個？（七分）

6. 在桌上有很多張卡片，每張卡片可以寫上 1, 2, 3, …, n 中的任意一個數。已知全部卡片上的數之總和為 $k \cdot n!$，其中 k 是正整數。請證明：這些卡片可以被分成 k 堆，使得這 k 堆中每一堆卡片上的數之總和都是 $n!$。
（註：$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \Lambda \times 3 \times 2 \times 1$）（九分）

7. (a) 有一個電子線路板其線路排列方式像一個3×3的方格表，它共有 16 個節點（分佈在九個方格的頂點上），節點間沿著方格的邊用電線相連。這些電線中可能有幾段毀壞，但我們無法從外觀分辨出來。工廠的品管員可以用儀器檢查任二個節點是否通電。請問該品管員至少要用儀器檢查多少次才能確定這個線路板中任意二個節點都可通電？（註：如果這個線路板中的二個節點存在一條完好的電線路徑相連，則稱這二個節點可通電）（五分）
(b) 同(a)，只是電子線路板其線路排列方式換成像一個5×5的方格表（36 個節點）。（五分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2002 秋季賽　高中組　高級卷　27 Oct. 2002

※　每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有一個正 19999 邊形，在每個頂點標上 2, 3, 4, …, 20000 中的任意一個數，而且所標的數兩兩都不相同。在每二個頂點的連線上寫出這二個頂點上的數之最大公因數。若將所有頂點上的數擦掉，只根據遺留下各連線上的數，請問是否可以確定原來各頂點上的數？（四分）

2. 已知有一平面與一個正立方體的交集是一個五邊形，請證明：在這個五邊形中一定有一個邊，它的長度和 1 公尺至少相差 20 公分。（六分）

3. 在凸 n 多邊形內畫上一些對角線，這些對角線在多邊形內部兩兩不相交，且將此多邊形分割爲 $n-2$ 個三角形。把這些三角形的內部塗上紅色或藍色，每個三角形都只塗一種顏色，而且有共同邊的兩個三角形內部所塗的顏色都不相同。請問塗上紅色與藍色三角形的總數量最多相差幾個？（六分）

4. 在桌上有很多張卡片，每張卡片可以寫上 1, 2, 3, …, n 中的任意一個數。已知全部卡片上的數之總和爲 $k\cdot n!$，其中 k 是正整數。請證明：這些卡片可以被分成 k 堆，使得這 k 堆中每一堆卡片上的數之總和都是 $n!$。
（註：$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\Lambda\times 3\times 2\times 1$）（八分）

5. 兩個圓相交於 A 與 B 二點，已知過點 B 的一條直線分別再交第一個圓與第二個圓於點 K 與點 M，直線 L_1 平行於直線 AM 且和第一個圓相切於點 Q，直線 QA 再交第二個圓於點 R，直線 L_2 切第二個圓於點 R。請證明：
(a) L_2 平行於直線 AK；（四分）
(b) 直線 L_1、L_2 和直線 KM，三條直線交於一點。（四分）

6. 設 $\{a_n\}$ 爲一正整數數列，$a_1=1$，$a_2=2$。當 $k\geq 3$ 時，令 a_k 是滿足下列條件的最小正整數：
(1) a_k 與 $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ 相異；
(2) a_k 與 a_{k-1} 不互質。
請證明：所有的正整數都會在這個數列中出現。（八分）

7. (a) 有一個電子線路板其線路排列方式像一個 3×3 的方格表，它共有 16 個節點（分佈在九個方格的頂點上），節點間沿著方格的邊用電線相連。這些電線中可能有幾段毀壞，但我們無法從外觀分辨出來。工廠的品管員可以用儀器檢查任二個節點是否通電。請問該品管員至少要用儀器檢查多少次才能確定這個線路板中任意二個節點都可通電？（註：如果這個線路板中的二個節點存在一條完好的電線路徑相連，則稱這二個節點可通電）（四分）
(b) 同(a)，只是電子線路板其線路排列方式換成像一個 7×7 的方格表（64 個節點）。（五分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》