

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2008 秋季賽 國中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在一塊 100×100 的棋盤上放入 100 枚皇后，使得它們之間都互相不攻擊。若將此棋盤切割成四塊 50×50 的小棋盤，試證每塊小棋盤上至少有一枚皇后。
(註：西洋棋皇后可攻擊東、西、南、北、東南、西南、東北、西北方向的棋子。)(四分)
2. 有四塊石子，它們的重量都是正整數公克，及一台可指示左秤盤與右秤盤上物品重量差的「重量差天平」。若至多可能有一次秤重此天平會有 1 公克的誤差，請問能否用此「重量差天平」秤四次即可確定這四塊石子的正確重量？
(六分)
3. 小思畫出一個三角形 ABC 及它的一條中線 AD 。當小艾得到 $\frac{AD}{AC}$ 之值即可證明 $\angle CAB$ 為鈍角且 $\angle BAD$ 為銳角。請確定 $\frac{AD}{AC}$ 之值並證明您的結果。(六分)
4. 小貝宣稱他有一張交通圖，圖上有五個城市與十條公路，每條公路恰好連接兩個城市，任兩個城市恰只有一條公路連接，任一條公路至多與其它一條公路相交，每個城市連出去的四條公路分別可以交錯地塗上紅色或黃色。請問小貝宣稱的事項是否為真？(六分)
5. 令 a_1, a_2, \dots, a_n 為正數使得 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}$ 。試證
 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq 2$ (八分)
6. 三角形 ABC 的三個邊互不相等，點 E 與點 F 在三角形 ABC 之外部使得 $\angle ECA = \angle EAC = \angle FAB = \angle FBA = \theta$ 。線段 BC 的中垂線與通過點 A 且垂直於 EF 的直線交於點 D ，請問 $\angle BDC$ 之值為何？(九分)
7. 在無窮數列 $\{a_n\}$ ， $a_0 = 0$ 中，對於 $n \geq 1$ ，若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 1，則 $a_n = a_{n-1} + 1$ ；若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 3，則 $a_n = a_{n-1} - 1$ 。此數列的首幾項為：0、1、2、1、2、3、2、1、2、3、4、3、2、3、2、1、 \dots 。
(a) 證明在此數列中，1 將出現無窮多次；(五分)
(b) 證明在此數列中，每一個正整數將出現無窮多次。(五分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》