International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2009 秋季賽　國中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有十個完全相同的容器，它們都各裝有一些牛奶，但總量不超過一個容器的容量。這些容器上都有非常細密的刻度，可以百分之百地精準顯示容器內牛奶的容量。現只允許進行以下的操作：任選一個容器，將其中的一些牛奶等量地倒入其它所有的九個容器之中，以上的步驟稱為一次操作。請證明：只需進行不超過十次的操作即可使所有容器內的牛奶都等量。(四分)

【參考解法 1】

假設 10 個杯子分別裝有 a_1、a_2、…、a_{10} 的牛奶，依序將第 i 杯分 $\frac{a_i}{10}$ 到其餘九個杯子，經過十次分裝每個杯子都有 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{10}}{10}$ 的牛奶，即達成條件。

【參考解法 2】

將十杯牛奶照多寡排列，最大杯裝有 a_1，餘下類推。現在採用調整的方法，由於第九杯不少於第十杯，所以必可以用一次操作將兩杯調成一樣。具體方法是將第九杯分 $\frac{a_9-a_{10}}{10}$ 到每一杯。注意到調整後第九杯和第十杯一樣了，而第八杯原先就不少於第十杯，經過操作後，兩杯加上來自第九杯相同的量後，自然仍不少於，於是比照前面步驟我們可將第八杯調成跟第九與第十杯一樣。重複做九次調整十杯牛奶就會一樣多，即達成條件。

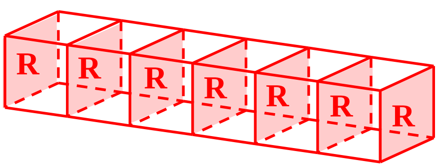
【評分標準】

1. 提出一種實際可行的操作方式，$\frac{5}{7}$
2. 證明該方法可行並且能夠達成目的，$\frac{2}{7}$

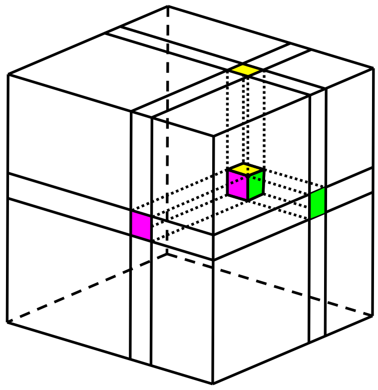
2. 小克有 1000 個完全相同的小正立方體。將每個小正立方體中的一雙相對的面上塗成紅色，另一雙相對的面上塗成藍色，最後一雙相對的面上塗成白色。小克將這些小正立方體拼成一個 10×10×10 的大正立方體，使得任何兩個小正立方體相接觸的面之顏色都相同。請證明大正立方體必定有一個面上全為同一種顏色。(六分)

【參考解法】

首先，對於某一長條（如下圖），它們的接面顏色和最外兩側的顏色皆相同。



故對於大正立方體上表面上如圖一的三個小方格，都可由上述的性質得到這三個小方格的顏色必不相同，因為這三個小方格對應到某一個小正立方體的三個面。

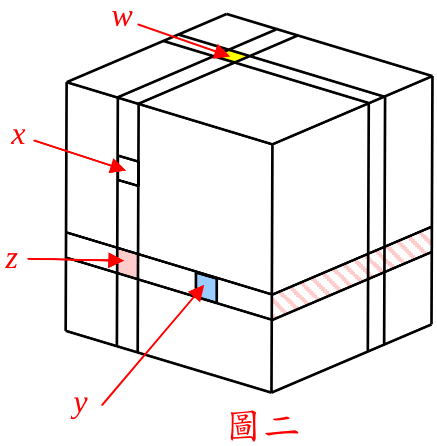


圖一

假如大立方體的三個表面都分別只有一個顏色，那麼證明便結束了。否則，我們可以找到一個面上有兩個小方格不同色；並且我們可以假設它們在同一排上（如果不在同一排，譬如在圖二的方格 x、y，那我們只要考慮一下 x、z 或是 y、z 的顏色即可）。

不失一般性地假設右圖中 z 是紅色，y 是藍色。

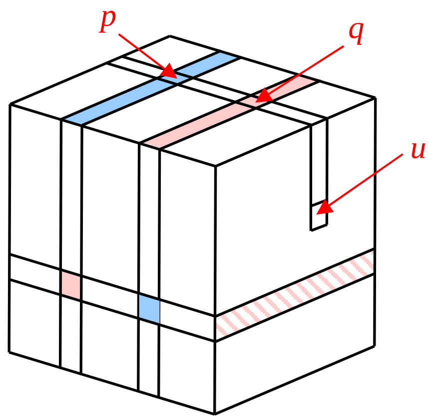
考慮 y, z 所在該層右側的每一個方格（圖二中斜線部分），他們既不能是藍色也不能是紅色，因此整排都是白色。



圖二

考慮大正立方體上表面與 z 同排（圖二中箭頭所指處）的每一個方格，即不能是紅色（因為 z）也不能是白色（因為右色的白色），因此該排都是藍色。同理可證上表面與 y 同排的所有格子都是紅色，如圖三所示。

到此證明都只是盡量把已知的方格塗上顏色而已。這時我們便可以看出我們要證明的應該是右側那面全部都是白色。



圖三

於是對於右側的每個格子 u，他不能是藍色（因為要跟格子 p 不同色）也不能是紅色（因為要跟格子 q 不同色，故 u 是白色。

由於 u 是隨意取的，於是同理可證右側每一格都是白色，得證。

【評分標準】

1. 運用如上述討論證明結論，$\frac{7}{7}$
2. 證明較小單位（如 2x2x2）時拼法只有數種，$\frac{2}{7}$
3. 利用小單位拼出 10x10x10 可能的情形，從而推得結論，$\frac{5}{7}$

【討論】

本題證明過程並不算難，但是要把它寫得很清楚並不容易。證明過程中一定必須界定一些名詞來闡述，如果沒有很清楚的寫下這些名詞的意義的話，很容易造成混淆。除了寫下明確的定義外，用圖來指明討論的對象也很有幫助。

再者，要弄清楚何時可用「同理可證」以及「不妨假設」。譬如上述證明中，我們可明顯可以「不妨假設 z 是紅色，y 是藍色」，因為顏色是對稱的，但我們如果要「不妨假設 z, y 在最左下角相鄰兩格」，這是需要額外的理由的。萬一沒有想清楚，很可能就這樣落掉了一些可能性沒有被證明到。

3. 請找出所有正整數 a、b，使得 $(a+b^2)(a^2+b)$ 的乘積具有 2^m 的形式，其中 m 為正整數。（六分）

【參考解法】

令

$$a+b^2=2^p \qquad (1)$$

$$b+a^2=2^q \qquad (2)$$

又 a、$b\geq 1$，故 p、$q\geq 1$，從而 a、b 奇偶性相同。

若 $a=b$，則 $a+a^2=a(a+1)=2^p$

$\because a$ 與 $a+1$ 必是一奇一偶

$\therefore a=b=1$

若 $a\neq b$，可設 $a>b$，則由於 $a^2-a=a(a-1)>b(b-1)=b^2-b$，故 $a^2+b>b+a^2$，即 $q>p$。因此將式(2)－式(1)可得 $(a-b)(a+b-1)=2^p(2^{q-p}-1)$。

$\because a$ 與 b 奇偶性相同

$\therefore a+b-1$ 為奇數

$\therefore 2^p \mid (a-b)$

$\therefore a-b\geq 2^p=a+b^2$，即 $0\geq b(b+1)$，矛盾。

故原式只有一解：$a=b=1$。

【評分標準】

1. 得到一組解 $a=b=1$，$\frac{1}{7}$
2. 證明 a、b 一奇一偶時無解，$\frac{0}{7}$
3. 證明 a、b 皆為偶數時無解，$\frac{2}{7}$
4. 證明 a、b 皆為奇數時無解，$\frac{4}{7}$

【討論】

a、b 一奇一偶的情況可以用同樣的方法：

$$2^p \mid (a+b-1) \Rightarrow a+b-1\geq 2^p=a+b^2$$

推得矛盾。但因為這種情況很容易排除，因此不占分數。

另外 a、b 皆為偶數和 a、b 皆為奇數的情況，亦可以用無窮遞降法來證明，唯有許多小細節必須要仔細地處理，不然有可能被扣掉一點點分數。

無窮遞降法的概念，以 a、b 皆為偶數為例子，是假設 a、b 是一組皆為偶數的解，那我們令 $a=2a_1$、$b=2b_1$，帶回原式中便能得到 a_1、b_1 的新的關係式：

$$a_1+2b_1^2=2^{p-1}$$

$$b_1+2a_1^2=2^{q-1}$$

進而可推得 a_1、b_1 也都是偶數。再令 $a_1=2a_2$、$b_1=2b_2$，那麼又可以推到 a_2、b_2 也是偶數…這樣步驟可以無窮無盡的下去，構造出 a_3、a_4、a_5、…。但是由於

$a>a_1>a_2>\cdots$都是正整數，無窮無盡做下去根本不可能！於是這個矛盾指明最初假設的解 a、b 不可能存在。

4. 在菱形 $ABCD$ 的 BC、CD 邊上分別取 P、Q 兩點，使得 $BP=CQ$。請證明三角形 APQ 的重心落在線段 BD 上。（六分）

【參考解法】

若是對解析法稍微有點認識，本題的解法可說是非常地直覺。

假設座標 $A(0, a)$、$B(b, 0)$、$C(0, -a)$、$D(-b, 0)$。

一旦畫圖出來，便能發現到 P 與 Q 的 y 座標相加應該恰為 $-a$，而重心的座標表示法很簡單，這促使我們往此想法前進。

首先先仔細證明我們的觀察：P 與 Q 的 y 座標相加應是個定值。將 P、Q 對 X 軸作垂直線，並利用全等三角形可以達到這個目的，或者我們計算 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式：$ax-by-ab=0$，與 $\overleftrightarrow{CD}$ 的方程式：$ax+by+ab=0$。

利用參數式假設 $P(b+bm, am)$、$Q(bn, -a-an)$，代入 $\overline{BP}=\overline{CQ}$ 的式子可以得到 $m=n$（若 $m=-n$ 則 P 不在線段 $\overline{BC}$ 上或 Q 不在線段 $\overline{CD}$ 上，不合)，$\triangle APQ$ 的重心 y 座標 $=\dfrac{a+am+(-a-an)}{3}=0$，故重心的確在 $\overline{BD}$ 上，得證。

【評分標準】

1. 證明命題，$\frac{7}{7}$
2. 只證明重心在直線 $\overleftrightarrow{BD}$ 上而未證明重心在線段 $\overline{BD}$ 上，$\frac{0}{7}$

5. 現有一套質量分別為 1 克、2 克、3 克、⋯、N 克的砝碼各一枚。某人欲從中取出若干枚（至少二枚）砝碼，使得所取出砝碼的總質量等於剩下砝碼的質量之平均。請證明

   (a) 若 $N+1$ 是完全平方數，則此人可達成目的；（二分）

   (b) 若此人達成目的，則 $N+1$ 是完全平方數。（七分）

【思路】

(a) 令 $N+1=k^2$，k 是正整數。

透過嘗試 k=2、3、4（N 分別是 3, 7, 15）所獲得的經驗，我們可以猜測只要拿出 1、2、3、...、k 克重的砝碼，便能夠滿足題目所需。一般情況必須稍加計算來證明：

$$1、2、3、...、k\text{ 克的砝碼總重}=1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

由於剩下的砝碼保持等差，因此我們可以很快地計算剩餘砝碼的平均值為 $\dfrac{(k+1)+N}{2}=\dfrac{k+1+k^2-1}{2}=\dfrac{k(k+1)}{2}$，兩者恰好相等，因此 N+1 為平方數時可以達到目的。

(b) 現在要證明的是要達成目的 N+1 一定要是平方數。我們先先思考一下 N+1 是平方數有什麼過人之處。第一個會想到的當然是 N 可以寫成兩個差 2 的數字

相乘$(k+1)(k-1)$，但接著似乎便無法發揮下去。

先回來看題目的要求。題目希望相等的兩個值都跟我們所選取的砝碼克數和重量有關係；若是改變選取的砝碼，「選出的砝碼總重」很直接地跟著變動，但是「剩下的砝碼平均值」變化得很很隱晦不明。這促使我們想要把砝碼克數和重量設為變數，然後把這些變數整理到等號其中一邊：

假設現在選取了m個砝碼，這m個砝碼總重為s克，那麼剩下沒被取到的$N-m$個砝碼總重量是

$$1+2+3+\cdots+N-s=\frac{N(N+1)}{2}-s$$

於是題目要求的條件便是

$$\frac{\frac{N(N+1)}{2}-s}{N-m}=s \Rightarrow \frac{N(N+1)}{2}=s(N-m+1)$$

m跟s是有關係的。如果我們決定選m個砝碼，這砝碼的總重量s最輕不過$1+2+\ldots+m$，最重也只能是$N+(N-1)+(N-2)+\ldots+(N-m+1)$，因此

$$\frac{m(m+1)}{2}\leq s\leq \frac{m(2N-m+1)}{2}$$

如果觀察的再仔細一點，便可以發現我們一定可以選m個砝碼讓s是介在這個範圍中的任何一個指定的整數。

這樣，我們便很清楚地看出一些端倪，如果m取得太大，那麼總重量s被迫也要變得比較大，可能會造成等號右邊過度脹大，等號便不可能成立。這樣子，我們就可以得到m的一個上限。

把這個想法寫成數學式子：

$$\frac{N(N+1)}{2}=s(N-m+1)\geq \frac{m(m+1)}{2}(N-m+1)$$

整理一下這個式子：

$$(N-m)(N-m^2+1)\geq 0$$
$$(N-m^2+1)\geq 0$$
$$\sqrt{N+1}\geq m$$

非常美好地得到了很不錯的上界！這表示說，如果我們又可以證明$\sqrt{N+1}\leq m$（或是差一些些的下界），那麼就可以得到$m=\sqrt{N+1}$。意即，選取的砝碼個數剛好就是$\sqrt{N+1}$，而砝碼個數應當是個正整數，證明便結束了！

於是我們開始思考如果選取的個數m太小會怎麼樣。第一個想到的是拿$s\leq \frac{m(2N-m+1)}{2}$做相同的估計，但很不幸地我們得到了非常弱的上界（大約只有$m\geq 3$），於是我們必須另尋它法。

我們重新觀看等式：

$$\frac{N(N+1)}{2}=s(N-m+1)$$

既然剛剛用 s 的上界 $\dfrac{m(2N-m+1)}{2}$ 得到 m 的上界很弱，再加上我們之前便發現我們的 s 可以取小於上界的任何正整數。這表示 s 太過自由了：我們可以決定一個 m，算出 $s=\dfrac{N(N+1)}{2(N-m+1)}$，它幾乎保證會比 $\dfrac{m(2N-m+1)}{2}$ 還小，而我們便可以取出 m 個砝碼讓總重恰好為 s。因此，我們必須另覓它法。把想法逆轉過來：究竟還有什麼條件沒用到呢？

s 必須是正整數。

如果 $\dfrac{N(N+1)}{2(N-m+1)}$ 不是正整數，那剛剛說的策略完全是白搭，因此，我們轉而尋找有哪些 m 會讓 $\dfrac{N(N+1)}{2(N-m+1)}$ 是正整數，意即，$2(n-m+1)\,|\,N(N+1)$。

我們先看比較鬆的條件：怎麼樣的 m 會讓 $(N-m+1)\,|\,N(N+1)$。如果 m 很小的話，會發生什麼事情呢？

譬如說 m=3，那 $N-m+1$ 跟 N+1 是兩個只差 3 的正整數，$N-m+1$ 跟 N 更只差 2 而已。我們知道兩個差 3 的正整數公因數最大頂多是 3，表示分子的 N 了不起只能夠把分母 $N-m+1$ 中的 3 消掉，同樣的 N+1 頂多只能消掉 $N-m+1$ 中的 2，這就表示 $N-m+1$ 最大也只能是 6，但是 N 很大，m 又只有 3，便陷入了窘境。

上述觀察得到 m 不能太小，也就是說 m 有個下限。將觀察寫成數學形式：

$$\begin{aligned}&(N-m+1)\,|\,N(N+1)\\ \Rightarrow\ &(N-m+1)\,|\,[N-(N-m+1)][(N+1)-(N-m+1)]\\ \Rightarrow\ &(N-m+1)\,|\,m(m-1)\\ \Rightarrow\ &(N-m+1)\le m(m-1)\end{aligned}$$

第二行到第三行就是計算 $N-m+1$ 跟 N 或 N+1 的公因數最大可以是多少（它們的差值）；第四行則是與上例中能得到「$N-m+1$ 最大也只能是 6」的原因。

繼續化簡：

$$\Rightarrow N+1\le m^2 \Rightarrow \sqrt{N+1}\le m$$

非常完美地得到緊緻的下界！因此 $\sqrt{N+1}=m$ 為一正整數，證明結束了。

【參考解法】

(a)　令 $N+1=k^2$，k 是正整數。我們取 1、2、3、…、k 克共 k 個砝碼，其總重為 $\dfrac{k(k+1)}{2}$，而剩餘的砝碼平均值為 $\dfrac{(k+1)+N}{2}=\dfrac{k+1+k^2-1}{2}=\dfrac{k(k+1)}{2}$，符合題目需求。

(b)　假設共取了 m 個砝碼，總重為 s 克，又這 N 個砝碼總重為 $\dfrac{N(N+1)}{2}$，於是題目要求便是 $\dfrac{\frac{N(N+1)}{2}-s}{N-m}=s\Rightarrow\dfrac{N(N+1)}{2}=s(N-m+1)$

(1) 我們先證明$\sqrt{N+1}\ge m$

由於所取的 m 個砝碼總重最小為$1+2+3+\cdots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$，因此

$$\frac{N(N+1)}{2}\ge\frac{m(m+1)}{2}(N-m+1)$$

$$s(N-m+1)\ge\frac{m(m+1)}{2}(N-m+1)$$

$$(N-m)(N-m^2+1)\ge 0$$

$$(N-m^2+1)\ge 0 \quad (\because N>m)$$

$$\sqrt{N+1}\ge m$$

(2) 我們再證明$\sqrt{N+1}\le m$

由於

$$N(N+1)=2s(N-m+1)$$

$$\Rightarrow (N-m+1)\,|\,N(N+1)$$

$$\Rightarrow (N-m+1)\,|\,[N-(N-m+1)][(N+1)-(N-m+1)]$$

$$\Rightarrow (N-m+1)\,|\,m(m-1)$$

$$\Rightarrow (N-m+1)\le m(m-1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{N+1}\le m$$

綜合(1)(2)得到$m=\sqrt{N+1}$，即$N+1=m^2$為完全平方數。證畢。

【評分標準】

(a)

1. 得到 N=3, 7, 15 或前有限項的取法，但是各取法之間無法推出規律，$\dfrac{0}{7}$
2. 宣稱$N+1=k^2$時只要取前 k 個就能達到目的。可能舉了前有限項驗證，$\dfrac{5}{7}$
3. 證明 k 為任意正整數時取前 k 個就能夠達成目的，$\dfrac{2}{7}$

(b)

1. 證明$\sqrt{N+1}\ge m$。或者估出 m 的最大下界(可能用 s 表示)並且可行，$\dfrac{3}{7}$
2. 證明$\sqrt{N+1}\le m$。或者估出 m 的最小上界(可能用 s 表示)並且可行，$\dfrac{4}{7}$

6. 在一個無限大的方格表上，將 2009 個 $n\times n$ 的正方形小紙板沿著方格表的格線放置在此方格表內(每個正方形小紙板恰好蓋住方格表上 n^2 個小方格，正方形小紙板可以互相重疊)，然後將方格表上每個放置有奇數片紙板的小方格塗上紅色。請證明塗上紅色的小方格數不少於 n^2。（十分）

【參考解法】

為了方便說明，我們將方格表標上座標。接著我們將方格表中的每一個格子

都填上一個數字：若該格的座標為(a, b)，那麼我們就將它標上

$$n\times(a \bmod n)+(b \bmod n)$$

（其中 $a \bmod n$ 表示 a 除以 n 的餘數，也就是 $a \bmod n = a-\left\lfloor\frac{a}{n}\right\rfloor\times n$）。在這樣的編號下，每一格都被標上了 0～n^2-1 的一個數字。

將 $n\times n$ 的正方形覆蓋到方格表上時，因為被覆蓋到的小方格中，不會有兩格的 x 座標和 y 座標分別除以 n 的餘數都相同，所以被覆蓋住的這群小方格標號皆不同，也就是，標號為 0～n^2-1 的小方格恰好各被蓋住一個。

因為總共放上了 2009 個正方形，所以對於任意一個 0～n^2-1 中的數字 a，被標上 a 的所有格子加起來總共恰被覆蓋了 2009 次，是個奇數；進而可以推到，至少有一個被標上 a 的格子，它被覆蓋了奇數次。

所以對於 0～n^2-1 中任意一個標號，總是有一個該標號的格子被覆蓋了奇數次，會被塗上紅色，故共至少有 n^2 個紅色格子（0～n^2-1 每個標號至少一個）。

7. A 與 B 兩人打算一起去有 2009 個小島的列島旅遊。小島間的交通只能依靠船舶相連，有些小島之間具有往返的交通船，有些則無。A 和 B 兩人進行以下遊戲：任何小島不可以造訪二次或二次以上，由 A 先選擇一個小島著陸，接著由 B 選擇到一個未曾造訪過的小島旅遊，依此規則兩人輪流選擇。無法再繼續符合遊戲規則的行程(沒有小島可選擇或無交通船可從當時所在的小島通往所選擇的小島)者為輸方。請證明無論這些小島間船運的路線系統如何，也無論 B 如何應對，A 永遠有數學策略可以獲勝。（十四分）

【參考解法】

我們把島嶼看成點，交通船看成邊，則整個地圖會變成一個有 2009 個點的無向圖。

我們定義這個圖上的一個「匹配」為選擇圖上的一些邊，使之中任兩條邊皆不具有共同頂點。並且我們定義「最大匹配」為一個所含邊數最多的匹配。（最大匹配可能不唯一，但顯然空集合為一匹配，且匹配所含邊數不會超過頂點數的一半，所以最大匹配必定存在）。

A 的策略如下：首先 A 先找到這個圖的一個最大匹配 X。因為這個圖有 2009 個點，是個奇數，故必定有一個點 C 不為 X 中某條邊的端點，A 就選擇從 C 點出發；當 B 移動到某點 S 時，A 移動到點 T 使得 ST 是 X 內的邊（根據匹配性質，顯然此 T 為唯一）。

我們接下來證明這樣的方法下 A 必勝。

若 A 用此方法但並沒有獲勝，表示過程中 B 移動到某一點時，(1)不存在點 T 使得 ST 為 X 中的邊，或是(2)存在點 T 使得 ST 為 X 中的邊但是 T 已經被走過了。

若是(1)的情況，則我們將他們從起點到現在走過的點列出來：

$$C\to P_1\to P_2\to\ldots\to P_{2n}\to S,$$

根據我們的策略，我們知道 P_{2k-1} 和 P_{2k} 之間有在 X 中的邊，若我們將這 n 個邊從 X 中去除，並且換成 $\overline{CP_1}$、$\overline{P_2P_3}$、…、$\overline{P_{2n}S}$ 這些邊的話，那麼 X 中的邊數會增加一條，並且仍然滿足匹配的性質。這和 X 為邊數最多的匹配矛盾。

若是(2)的情況，我們討論當初 T 是被誰走到的，若是被 B 走到的，那根據策略，當時 A 的下一步應當為 S，不合。若是被 A 走到的，但 A 若會走到 T，表示要不然就是 B 走到過 S，要不然就是 A 第一步就走到 T，兩種情況顯然皆不合。

故綜上所述，A 按照這個方法必定可以獲得勝利。

【討論】

這題是頗有難度的圖論題目，而「匹配」(matching)和「最大匹配」(maximum matching)是圖論中重要的概念。事實上本題的大致概念可以很簡短地說明：

首先 A 先找到一組最大匹配，並選擇一個沒被匹配到的點作為起點。接下來每一步，只要 B 走到某個小島，A 就走到該小島的匹配上。如果 B 走到的小島沒有匹配，那麼這一路走下來的路線構成一個「擴充路徑」(augmenting path)，與原匹配為最大匹配不合。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》