International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

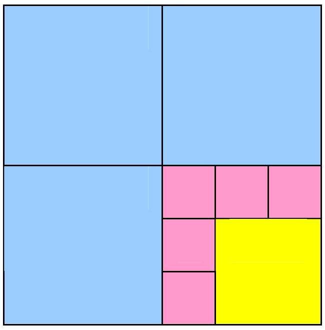
2009 秋季賽　國中組　初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 是否能將一個正方形切成九個小正方形，並將其中的一個塗為黃色、三個塗為藍色、五個塗為紅色，使得相同顏色之正方形的面積都相等、不同顏色之正方形的面積都不相同？（三分）

【參考解法】

可，如圖所示，一個 6×6 的正方形，可切割為一個 2×2 的黃色正方形、三個 3×3 的藍色正方形、五個 1×1 的紅色正方形：



【評分標準】

1. 指出九個小正方形的尺寸，$\frac{2}{7}$
2. 指出如何將這九個小正方形拼成一個大正方形，$\frac{5}{7}$

2. 有四十枚砝碼其質量分別為 1, 2, 3, …..39, 40 克，將其中十枚重量為偶數克的砝碼放在天平的左秤盤內、將其中十枚重量為奇數克的砝碼放在天平的右秤盤內。若天平左右秤盤保持平衡，試證一定有一個秤盤內的二枚砝碼質量之差為 20 克。(四分)

【參考解法】

假設沒有秤盤內的二枚砝碼質量之差為 20 克。由題意知右秤盤的 10 個砝碼一定是由以下 10 對砝碼中每對恰選一個：(1, 21)、(3, 23)、(5, 25)、(7, 27)、(9, 29)、(11, 31)、(13, 33)、(15, 35)、(17, 37)、(19, 39)，此時右秤盤的總重量為 1+3+⋯+19+20k=100+20k，其中 k 是從每一對砝碼中選擇較重砝碼的對數；而左秤盤的 10 個砝碼也一定是由以下 10 對砝碼中每對恰選一個：(2, 22)、(4, 24)、(6, 26)、(8, 28)、(10, 30)、(12, 32)、(14, 34)、(16, 36)、(18, 38)、(20, 40)，左秤盤的總重量為 2+4+…+20+20h=110+20h，其中 h 是從每一對砝碼中選擇較重砝碼的對數。因天平保持平衡，故可知 100+20k=110+20h，即 10=20(k−h)，此與 k、h 都必為正整數矛盾，故假設錯誤。

【評分標準】

1. 明確表示使用「反證法」，$\frac{1}{7}$
2. 對於可能的總重提出模的概念，$\frac{2}{7}$
3. 證明命題，$\frac{4}{7}$

3. 將一個半徑為 5 cm 的圓形紙板置於桌上。小王用邊長為 5 cm 的正方形紙板依照下述規則依序擺放在圓紙板外部的桌面上：

   (i) 每個正方形都恰有一個頂點落在圓紙板的圓周上；

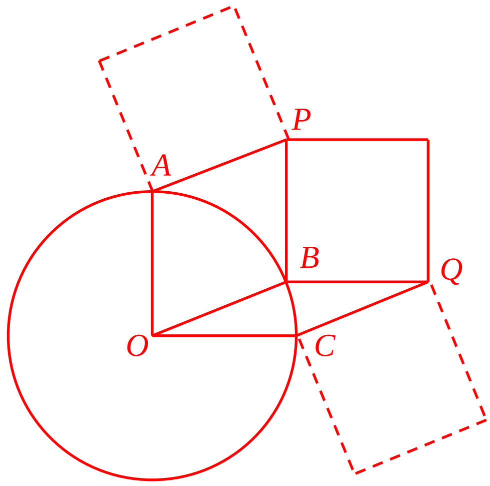
   (ii) 正方形互相不重疊；

   (iii) 每個正方形都與之前的正方形恰有一個共同的頂點。

   請問小王最多可以在桌上放置多少個正方形紙板？並請證明在此情況下所放置的第一個正方形與最後一個正方形也必須恰有一個共同的頂點。(四分)

【參考解法】

令 O 為圓心，B 為一個正方形在圓上的頂點，而該正方形上的另兩個頂點 P、Q 為其與前、後兩個正方形的共同頂點，且 A、C 為其前、後兩個正方形在圓上的頂點，如右圖所示。稱 OA、OB、OC 為其對應的正方形之「根管」。由題意可知四邊形 $OAPB$ 與 $OBQC$ 都是平行四邊形，再因 $\angle PBQ$ 為直角，故可得 $\angle AOC=90^\circ$，即證得任兩個交錯的根管都是互相垂直的，因此最多有 8 個根管，即最多可放置 8 個正方形，且放置 8 個正方形時，第一個正方形與最後一個正方形恰有一個共同的頂點。



【評分標準】

1. 猜測最大值為 8，$\frac{1}{7}$
2. 以任何形式表示能放置 8 個正方形，$\frac{1}{7}$
3. 證明上限為 8 個，$\frac{4}{7}$
4. 觀察圓內角，$\frac{1}{7}$
5. 證明頭尾相連，$\frac{1}{7}$

4. 我們只知道某個保險箱的密碼是一組兩兩互不相同的七個數碼。當輸入七個不同的數碼後，若其中至少有一個位置的數碼與保險箱的對應密碼相吻合，

則可開啟此保險箱。請問是否能用少於七次的嘗試，就保證可以打開它？（五分）

【參考解法】

用以下方式輸入，則 6 次內必可打開保險箱：

	a	b	c	d	e	f	g
(1)	1	2	3	4	5	6	0
(2)	2	3	4	5	6	1	0
(3)	3	4	5	6	1	2	0
(4)	4	5	6	1	2	3	0
(5)	5	6	1	2	3	4	0
(6)	6	1	2	3	4	5	0

若這些嘗試都無法打開，則 a、b、c、d、e、f 必是由 7、8、9 或 0 這四個數碼組成，此與 a、b、c、d、e、f 是兩兩互不相同的數碼矛盾。

【評分標準】

1. 用 7 次開保險箱，$\frac{0}{7}$
2. 提出用 6 次或以下開箱可行的解法，$\frac{5}{7}$
3. 證明該辦法必可開箱，$\frac{2}{7}$
4. 若僅證明只有 7 種數字時(非 0~9 十種數字)能用 6 次或以下開箱，$\frac{2}{7}$
5. 同上，並證明可推廣至 10 種數字的情形，$\frac{5}{7}$

5. 有一個新網站共有 2000 位會員註冊。每位會員都邀請 1000 位其他已註冊的會員成為他的好友。兩位會員視為朋友若且唯若它們互相邀請對方為好友。請問這個網站上至少有幾對朋友？（五分）

【參考解法】

可將 2000 位會員視為平面上的 2000 個點，其中 a 邀請 b 則以 a→b 表示，若兩人互相邀請，則以 a↔b 表示。因有 2000 個點，且每一點都連出 1000 個→，可知共有 2000000 個→；但因 2000 個點之間至多可有 $2000\times1999\div2=1999000$ 條線段，故可知至少有 $2000000-1999000=1000$ 條↔，即至少有 1000 對朋友。可用以下方式製造恰有 1000 對朋友的情況：

假設這 2000 位會員圍繞一個大圓桌依序等距坐著，而每一位會員都邀請在他接下來順時針方向的 1000 位會員為好友，則可知此情況下僅兩人恰坐在直徑的兩端才會成為朋友，因此此時僅 1000 對朋友。

【評分標準】

1. 宣稱至少 1000 對，$\frac{1}{7}$

2. 指出恰有 1000 對朋友的情況，$\frac{3}{7}$

3. 若構造出某個 n 時恰有 $\frac{n}{2}$ 對朋友的情況，$n \geq 8$ 且構造可推廣，$\frac{2}{7}$

4. 若僅證明至少 1000 對，$\frac{3}{7}$

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》