International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2009 秋季賽　高中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 一百位海盜玩牌賭錢，當牌局結束後，他們用金沙來償還賭債，每位海盜都有足夠的金沙來支付賭債。海盜之間只允許用以下的方式來收付金沙：
   (a) 向所有其它海盜支付相等數量的金沙；
   (b) 向所有其它的海盜收取相等數量的金沙。
   請證明經過有限次上述方式收付款後，每位贏錢的海盜都可以準確地收到他應收的款項、每位輸錢的海盜都可以準確地支付他應付的款項。(四分)

【參考解答】

假設第 k 名海盜要支付 a_k（若要收款則 a_k 是負的），以下是具體作法：每位海盜分別向其他 99 人支付 $\dfrac{a_k}{100}$ 即可，無關順序，總操作次數為 100 次。

<證明>：對於第 k 位海盜，他收得 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_{100}}{100}$；支付 $\dfrac{99a_k}{100}$。

又因為 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=0$，最終結果為支付

$$\frac{99a_k}{100}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_{100}}{100}=\frac{99a_k}{100}-(-\frac{a_k}{100})=a_k$$

【評分標準】

1. 提出一種實際可行的操作方式，$\dfrac{5}{7}$
2. 證明該方法可行並且能夠達成目的，$\dfrac{2}{7}$
3. 設方程組並宣稱其有解，卻未證明解存在（注意 100 個未知數 99 個聯立方程不保證有解），$\dfrac{2}{7}$

2. 將一個非正方形的矩形紙板切為 N 片矩形(不一定要全等)。請證明我們恆有辦法將這 N 片矩形每片都切為兩小片矩形，從每個矩形中各挑選一小片使得這 N 片恰可以拼成一個正方形、挑選剩下的 N 片也可以拼成另一個矩形(紙版不可以互相重疊)。(六分)

【參考解答 1】

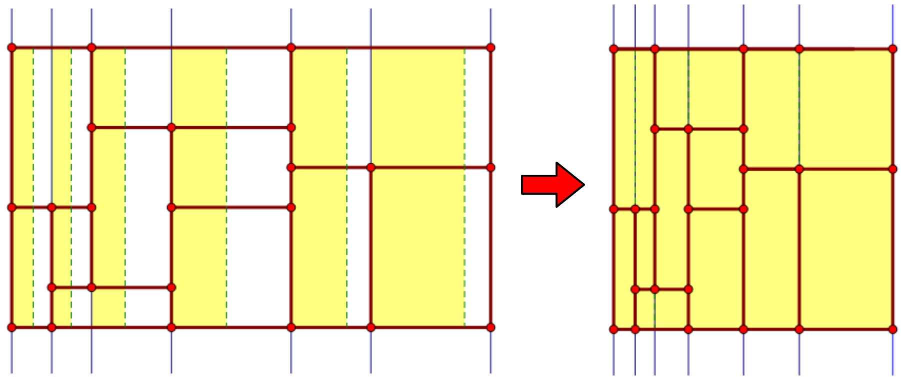
我們稱原先的矩形紙板為大矩形。顯然切出的 N 片矩形的邊皆和大矩形的邊平行。我們假設大矩形的長邊長為 a、短邊長為 b，並設長邊平行於 x 軸。對於每一塊切出來的矩形，設其和 x 軸平行的該邊長為 c，另一邊長為 d，那麼我們就將這個矩形切平行於 y 軸的一刀，使其分成寬為 $\dfrac{cb}{a}$ 和 $c(1-\dfrac{b}{a})$ 的兩塊。我們考慮將整個圖形沿 x 軸方向分別以 $\dfrac{b}{a}$ 和 $1-\dfrac{b}{a}$ 為比例縮放後的圖形，則大矩形分別變為一個正方形及一個矩形，並且分別的 N 個矩形會恰為我們切成的兩塊的

大小，故可以將這 N 塊矩形按照上述方法切割後，將所有切出來的第一塊拼成一個正方形，切出來的第二塊拼成一個矩形。

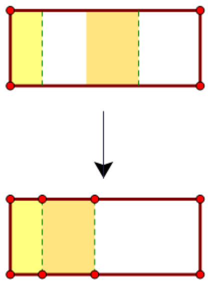
【參考解答 2】

同樣的我們設大矩形的長邊平行於 x 軸。將圖中所有平行於 y 軸的邊皆標出來並延伸（除了大矩形最右方的邊）。如左圖中藍色線段所示。
在這些邊的右方各取一塊矩形，使其寬度和恰為大矩形之短邊長並塗上顏色，如左圖中黃色區域。

我們顯然可以用這些著色區域拼成一個正方形，其他未著色的區域拼成一個矩形。

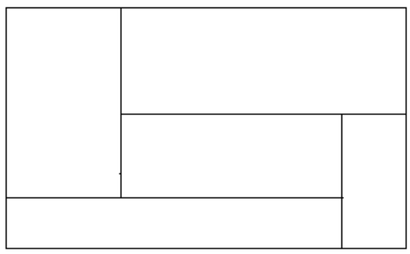


而對於切出來的 N 塊矩形，每一塊內部都會有至少一塊著色區域，我們可以如圖般將其所有著色區域全部合併，並且切成有著色及沒著色兩塊。因在將所有著色區域合併時，同一塊矩形內的著色區域是相鄰的，故這樣的切割仍然可以滿足條件。



【討論】

有些人使用的方法，如對切出來的小長方形個數做數學歸納法，並無法運用在下圖這個切法上。因此在思考這題時，不妨由先試試看從「對於下圖該怎麼分割」著手。



3. 有一個圓球與一個四面體的每條稜都相切，用直線連接任兩個不相鄰的稜上之切點。請證明這三條直線共點。（七分）

【參考解答 1】

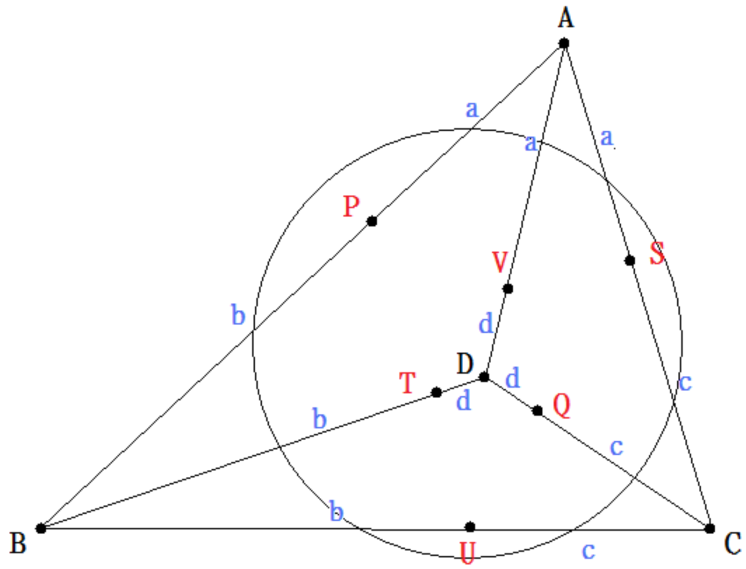
如圖，設四面體 $ABCD$ 與球的切點分別為 P、Q、R、S、T、U、V。由切線性質可以得到各點到連邊上的切點長度相同，即：

$\overline{AP}=\overline{AS}=\overline{AV}=a$

$\overline{BP}=\overline{BT}=\overline{BU}=b$

$\overline{CQ}=\overline{CS}=\overline{CU}=c$

$\overline{DQ}=\overline{DT}=\overline{DV}=d$



因此我們先轉而證明這三條直線其中任兩條共平面。這不僅是空間中三線共點的必要條件；反過來說，如果我們真的證出這三條直線任兩條共平面的話，只有兩種可能：要不就這三條線全在一個平面上，要不就這三條線共點。很明顯地 P、Q、R、S、T、U、V 毫不共平面，因此即能推得題目的結論。

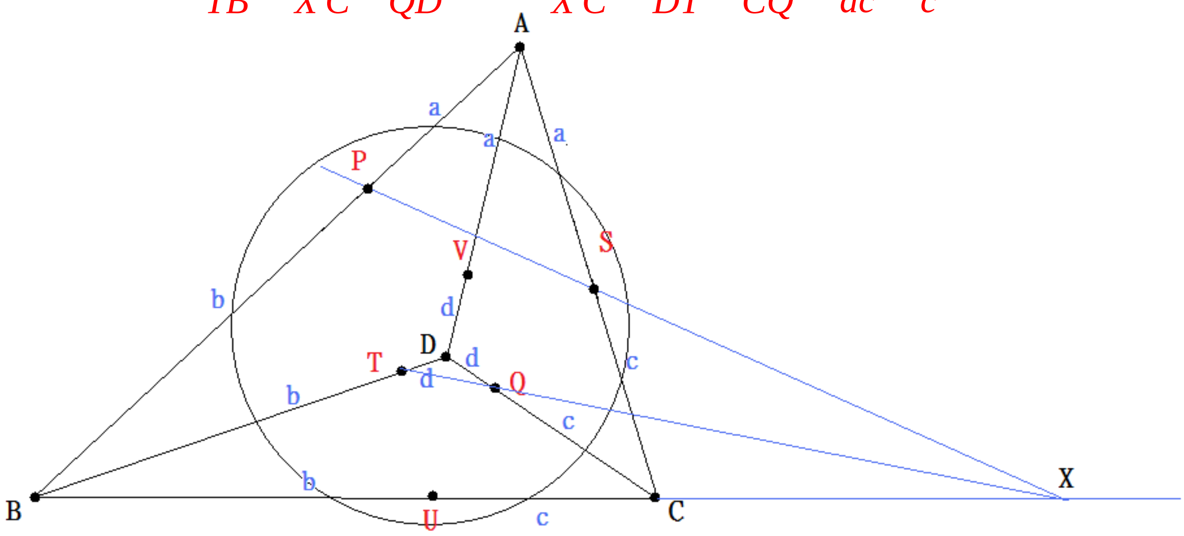
以下證明 P、Q、S、T 共平面。

延伸 $\overline{PS}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 邊於點 X，延伸 $\overline{TQ}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於點 X'。對於三角形 ABC 和直線 $\overleftrightarrow{PSX}$，有

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}\times\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\times\frac{\overline{CS}}{\overline{SA}}=1\Rightarrow\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}}\times\frac{\overline{SA}}{\overline{CS}}=\frac{ba}{ac}=\frac{b}{c}$$

同理，對於三角形 BCD 和直線 $\overleftrightarrow{TQX'}$，有

$$\frac{\overline{DT}}{\overline{TB}}\times\frac{\overline{BX'}}{\overline{X'C}}\times\frac{\overline{CQ}}{\overline{QD}}=1\Rightarrow\frac{\overline{BX'}}{\overline{X'C}}=\frac{\overline{TB}}{\overline{DT}}\times\frac{\overline{QD}}{\overline{CQ}}=\frac{bd}{dc}=\frac{b}{c}$$

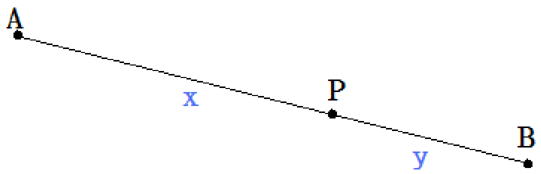


從而 X 與 X' 重和。由直線 $\overleftrightarrow{PSX}$ 和 $\overleftrightarrow{TQX}$ 共平面便推得到 P、Q、S、T 共平面。

同理可證 P、Q、U、V 共平面、S、T、U、V 共平面。又 P、Q、S、T、U、V 不共平面，從而 $\overline{PQ}$、$\overline{ST}$、$\overline{UV}$ 三線共點。

【參考解答 2】

這裡我們從解析著手。首先需要一個簡單的引理：



[引理一] 設 A、B 兩點座標分別為 $\vec{a}$、$\vec{b}$，

且 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點 P 使得 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{x}{y}$。則 P 點座標為 $\dfrac{x}{x+y}\vec{b}+\dfrac{y}{x+y}\vec{a}$，或是表示成

$\dfrac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\vec{b}+\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\vec{a}$。

[引理二]　設 A、B 兩點座標分別為 $\vec{a}$、$\vec{b}$。若另一點 P 座標可以表示為 $\dfrac{x}{x+y}\vec{b}+\dfrac{y}{x+y}\vec{a}$，則 A、B、P 共線。

現在回到題目中。設 A、B、C、D 點座標分別為 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$、$\vec{\delta}$。由引理一可知 P、Q 點座標分別為 $\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\vec{\alpha}+\dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\vec{\beta}$、$\dfrac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\vec{\gamma}+\dfrac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\vec{\delta}$。$S$、$T$、$U$、$V$ 的座標也可以一一表示，現在我們要硬造出一個點，讓 $\overline{PQ}$、$\overline{ST}$、$\overline{UV}$ 很明顯都會經過這一點。

如果仔細體會 P、Q 的座標表示的話，會發現 $\dfrac{\frac{1}{a}\vec{\alpha}+\frac{1}{b}\vec{\beta}+\frac{1}{c}\vec{\gamma}+\frac{1}{d}\vec{\delta}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$ 便是我們希望的點座標。(運用引理二很輕鬆能證明 $\overline{PQ}$、$\overline{ST}$、$\overline{UV}$ 都會經過該點)

【討論】

本題無人答對。事實上兩種解法的思路都很直覺，並沒有用到太多立體的技巧，希望同學能加強立體概念。

4. 用記號 $[n]!$ 表示 $1\times11\times111\times\cdots\times\underbrace{111\cdots111}_{n個1}$ (共有 n 個數相乘)。請證明 $[n+m]!$ 可被 $[n]!\times[m]!$ 整除。(九分)

【參考思路】

要求證明 $[n+m]!$ 可被 $[n]!\times[m]!$ 整除，或許會勾起你曾證明 $C_n^m=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ 是整數的回憶。

那我們回憶一下該怎麼證明 C_n^m 是整數呢？最簡單的證法是賦予它在組合上的意義，也就是「從 m 顆球中取 n 顆球的方法數」，其必然是整數。
第二個方法是想到在畫「巴斯卡三角形」時用到的關係式：

$$C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_n^{m-1}$$

這讓我們可以對 m 做數學歸納法來證明 C_n^m 是整數。

最後，我們再給一個純代數的方法證明 $\dfrac{(m+n)!}{n!m!}$ 是整數：

對於一個質數 p，在數字 1、2、⋯、n 中能被 p 整除的數字一共有 $\left[\frac{n}{p}\right]$ 個（這裡[]是高斯符號），能被 p^2 整除的數字一共有 $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ 個，...，於是，經過簡單的證明，我們可以得到 $n!$ 裡面 p 的因數個數恰好

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

假如 $\frac{(m+n)!}{n!m!}$ 不是整數，那麼就會有一個質數 p，「$(m+n)!$ 中含有 p 的因數個數」比「$n!$ 中含有 p 的因數個數與 $m!$ 中含有 p 的因數個數的總和」還少。我們證明這件事情不會發生，也就是對於每一個質數 p，都要有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m+n}{p^k}\right]\geq\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^k}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{p^k}\right]+\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$$

事實上，$[a+b]\geq[a]+[b]$ 本來就會成立，所以從 $\left[\frac{m+n}{p^k}\right]\geq\left[\frac{m}{p^k}\right]+\left[\frac{n}{p^k}\right]$ 便能證明上式的正確性。證畢。

從這些證法出發，我們或許找到了思維的方向。

【參考解答 1】

令 $a_k=\underbrace{111\cdots1}_{k\text{ 個 }1}$。

[引理一] 對於每一個數字 x，假如存在 k 使得 $x\,|\,a_k$，令 s 是這樣的 k 中最小的正整數。那麼便有 $s\,|\,k \Leftrightarrow x\,|\,a_k$。

引理的 $\Rightarrow$ 方向很簡單。要證明另外一個方向，假設有一個 k 讓 $x\,|\,a_k$，對 a_k 及 a_s 做輾轉相除法，可以得到 $x\,|\,a_{(k,s)}$，但是由於 s 是最小的了，因此 $(k,s)=s$，即 $s\,|\,k$。

由引理一，我們定函數 $f(x)$ 為最小的正整數 s 使得 $x\,|\,a_s$。特別地，如果不存在這樣的正整數，定 $f(x)=\infty$。

考慮任一質數 p。a_1、a_2、a_3、⋯、a_n 中能被 p 整除的數字一共有 $\left[\frac{n}{f(p)}\right]$ 個（$a_{f(p)}$、$a_{2f(p)}$、$a_{3f(p)}$、⋯），能被 p^2 整除的數字一共有 $\left[\frac{n}{f(p^2)}\right]$ 個，...。於是，將$[n+m]!$和$[n]!\times[m]!$分別做質因數分解後，p 的因數分別有 $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m+n}{f(p^k)}\right]$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{f(p^k)}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{f(p^k)}\right]$ 個。又由於 $[a+b]\geq[a]+[b]$，我們得到

$$\left[\frac{m+n}{f(p^k)}\right]\geq\left[\frac{m}{f(p^k)}\right]+\left[\frac{n}{f(p^k)}\right]$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m+n}{f(p^k)}\right]\geq\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{f(p^k)}\right]+\left[\frac{n}{f(p^k)}\right]\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{f(p^k)}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{f(p^k)}\right]$$

考慮每一質數 p，便能得到$[n+m]!$可被$[n]!\times[m]!$整除。證畢。

【參考解答 2】

令$\left[\!\left[\frac{m}{n}\right]\!\right]=\frac{[m]!}{[n]![m-n]!}$，$m\geq n$，原題等價於證明$\left[\!\left[\frac{m}{n}\right]\!\right]$是整數。

$$\left[\!\left[\frac{m}{n}\right]\!\right]=\frac{[m]!}{[n]![m-n]!}=\frac{[m-1]!\times a_m}{[n]![m-n]!}=\frac{[m-1]!\times(a_{m-n}+10^{m-n}\times a_n)}{[n]![m-n]!}$$

$$=\frac{[m-1]!\times a_{m-n}}{[n]![m-n]!}+10^{m-n}\times\frac{[m-1]!\times a_n}{[n]![m-n]!}=\frac{[m-1]!}{[n]![m-n-1]!}+10^{m-n}\times\frac{[m-1]!}{[n-1]![m-n]!}$$

$$=\left[\!\left[\frac{m-1}{n}\right]\!\right]+10^{m-n}\left[\!\left[\frac{m-1}{n-1}\right]\!\right]$$

m=1 時不難驗證$\left[\!\left[\frac{m}{n}\right]\!\right]$必為整數。

設$m=k-1$時$\left[\!\left[\frac{m}{n}\right]\!\right]$皆為整數，則 m=k 時，$(k\geq n)$亦為整數，從而由數學歸納法得證命題。

【討論】

此題只有一人以似於解法二的方式證出。許多人都寫到

$$\frac{[m+n]!}{[n]![m]!}=\frac{a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_{m+n}}{a_1a_2\cdots a_n}$$

由於$x\,|\,y\Rightarrow a_x\,|\,a_y$，並且當$k\leq n$連續 n 個整數必有一個可被 k 整除，因此得證。但事實上有可能兩個不同的 k 都對到同一個整數；這件事情在證明C_n^m是整數時就有可能發生。譬如：

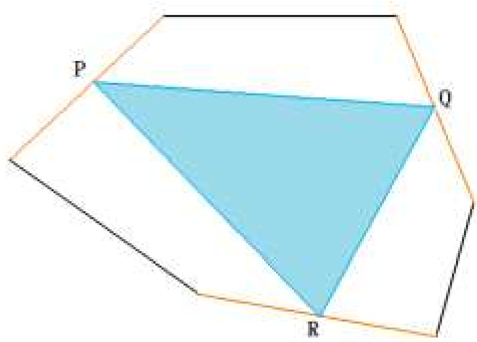
$$\frac{[65]!}{[15]![50]!}=\frac{51\times52\times\cdots\times65}{1\times2\times\cdots\times15}$$

10 跟 15 都毫無招架之力地被迫選擇 60。這件事情說明對於分母的數字做進一步的因數分解是有必要的。

當然，這題跟C_n^m又有點不一樣。當你面對分母的a_k時，若是企圖把 k 做質因數分解很有可能徒勞無功。譬如說$a_6=111111$，雖然 6=2×3，但是除了 11 和 111 外，111111 還有一個因數 91，這個 91 要用什麼表示呢？又要怎麼消掉呢？便不是一件太容易能解決的事情。（但其實若朝著此方向仍有辦法證明。）

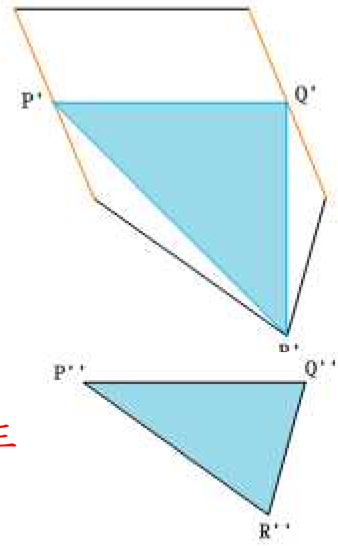
5. 在三角形 *XYZ* 與凸六邊形 *ABCDEF* 中，線段 *AB*、*CD*、*EF* 分別平行且相等於線段 *XY*、*YZ*、*ZX*。請證明以 *BC*、*DE*、*FA* 邊的中點為頂點的三角形之面積不小於三角形 *XYZ* 的面積。（九分）

【參考解答】



思路大致是：首先令中點連成的三角形為 *PQR*。將六邊形其中一條邊平移到讓其中一個頂點與另一條邊頂點重合，例如將 *CD* 邊平移使 *B* 與 *C* 重合。因為 *BC* 邊與 *DE* 邊都改變了，它們中點所連成的三角形 *PQR* 也變成新的三角

形 $P'R'Q'$。簡單的證明可以得到 $PR // P'R'$ 且 $PR = P'R'$，也就是說，三角形 PQR 與三角形 $P'R'Q'$「同底」，這讓我們趨向證明三角形 $P'R'Q'$ 面積比三角形 PQR 小。比較有問題的是要證明三角形 PQR 中 PR 邊上的高比三角形 $P'R'Q'$ 中 $P'R'$ 邊上的高大。雖然圖形上很明顯，但需要用到「原六邊形是凸的」小心的證明。
同樣的道理，將 EF 邊移動到使得 D 與 E 重合，此時自然會有 F 跟 A 重合。這時候三角形 $P'R'Q'$ 恰好變成與 XYZ 面積相同。因此，我們只要運用同樣的方法，再一次證明三角形 $P'R'Q'$ 的面積比三角形 $P''R''Q''$ 大，命題便得證。



6. A 與 B 兩人打算一起去有 2009 個小島的列島旅遊。小島間的交通只能依靠船舶相連，有些小島之間具有往返的交通船，有些則無。A 和 B 兩人進行以下遊戲：任何小島不可以造訪二次或二次以上，由 A 先選擇一個小島著陸，接著由 B 選擇到一個未曾造訪過的小島旅遊，依此規則兩人輪流選擇。無法再繼續符合遊戲規則的行程(沒有小島可選擇或無交通船可從當時所在的小島通往所選擇的小島)者為輸方。請證明無論這些小島間船運的路線系統如何，也無論 B 如何應對，A 永遠有數學策略可以獲勝。(十二分)

【參考解答】

我們把島嶼看成點，交通船看成邊，則整個地圖會變成一個有 2009 個點的無向圖。

我們定義這個圖上的一個「匹配」為選擇圖上的一些邊，使之中任兩條邊皆不具有共同頂點。並且我們定義「最大匹配」為一個所含邊數最多的匹配。(最大匹配可能不唯一，但顯然空集合為一匹配，且匹配所含邊數不會超過頂點數的一半，所以最大匹配必定存在)。

A 的策略如下：首先 A 先找到這個圖的一個最大匹配 X。因為這個圖有 2009 個點，是個奇數，故必定有一個點 C 不為 X 中某條邊的端點，A 就選擇從 C 點出發；當 B 移動到某點 S 時，A 移動到點 T 使得 ST 是 X 內的邊(根據匹配性質，顯然此 T 為唯一)。

我們接下來證明這樣的方法下 A 必勝。

若 A 用此方法但並沒有獲勝，表示過程中 B 移動到某一點時，(1)不存在點 T 使得 ST 為 X 中的邊，或(2)存在點 T 使得 ST 為 X 中的邊但是 T 已經被走過了。

若是(1)的情況，則我們將他們從起點到現在走過的點列出來：

$$C \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_{2n} \Rightarrow S$$

根據我們的策略，我們知道 P_{2k-1} 和 P_{2k} 之間有在 X 中的邊，若我們將這 n 個邊從 X 中去除，並且換成 $\overline{CP_1}$、$\overline{P_2P_3}$、…、$\overline{P_{2n}S}$ 這些邊的話，那麼 X 中的邊數會增加一條，並且仍然滿足匹配的性質。這和 X 為邊數最多的匹配矛盾。

若是(2)的情況，我們討論當初 T 是被誰走到的，若是被 B 走到的，那根據策略，當時 A 的下一步應當為 S，不合。若是被 A 走到的，但 A 若會走到 T，則要不然就是 B 走到過 S，要不然就是 A 第一步就走到 T，兩種情況顯然皆不合。

故綜上所述，A 按照這個方法必定可以獲得勝利。

【討論】

這題是頗有難度的圖論題目，而「匹配」(matching)和「最大匹配」(maximum matching)是圖論中重要的概念。事實上本題的大致概念可以很簡短地說明：

首先 A 先找到一組最大匹配，並選擇一個沒被匹配到的點作為起點。接下來每一步，只要 B 走到某個小島，A 就走到該小島的匹配上。如果 B 走到的小島沒有匹配，那麼這一路走下來的路線構成一個「擴充路徑」(augmenting path)，與原匹配為最大匹配不合。

7. 阿里巴巴寶庫的山洞入口有一圓形轉盤，它是開啟山洞門的機關。轉盤的圓周上有 N 個完全相同的桶子，任何相鄰桶子的距離都相等。在每一個桶子內各放置有一隻頭朝上或頭朝下的青魚。阿里巴巴每次操作都可以選擇任何位置、任何數量的桶子(數量從 1 個到 N 個)全部上下翻轉。當每次操作結束，圓盤立即開始轉動，如果所有桶內的青魚頭全部朝上或全部朝下，則山洞門就會打開。否則當圓盤停止轉動後，任何人都無法再辨認哪些桶子曾被翻轉過。無論這些青魚如何擺置，若阿里巴巴必有數學策略保證可以打開山洞門，請問所有可能的 N 值是什麼？（十四分）

【參考解答】

（註：以下解答題目情境與原題稍有不同。阿里巴巴→小明；桶子中的鯖魚→鑰匙；鯖魚朝上或朝下→鑰匙位置對或錯）

證明分成兩個部份： 1. 當 $n=2^k$ 時此題有解； 2. 當 $n\neq 2^k$ 時此題無解。

下用歸納法證明，當 $n=2^k$ 時此題有解。

顯然 $n=2^0$ 時是有解的；假設 $n=2^k$ 時有解，考慮 $n=2^{k+1}$ 的情況。

現稱轉盤上的鑰匙和他對面的那個是「一對」，所以共有 2^k 個鑰匙對。我們想做到以下這兩種任務：

1. 在一系列的操作中存在某一刻，每一對鑰匙對都是一樣的（所謂"一樣"的意思是： 要麼這兩個鑰匙的位置都是錯的，要麼都是對的）。
2. 把一對鑰匙對當成一個鑰匙，然後依照已知的解法扭這些鑰匙

假如第一個任務已經達成，如何進行第二個任務呢？如果小明原本在對抗 2^k 個鑰匙時，某一步扭的是第 a_1、a_2、...、a_i 個鑰匙（鑰匙從哪個開始數不重要）；那麼此時在個鑰匙這邊，小明只要扭第 a_1、a_2、...、a_i 個以及第 a_{1+2^k}、a_{2+2^k}、...、a_{i+2^k} 個即可。

另一方面，在致力於達成第一個任務的過程中，為了要把握住第一個目標達成的瞬間，也就是每一對鑰匙都相同那稍縱即逝的剎那，就必須在每一步的操作之後，「檢查」是不是每一對鑰匙都一樣。如何檢查呢？我們只要在每一步操作後，都自以為是地假裝現在每一對都是一樣的，直接進行第二個任務。要是門開了，就開了；要是門沒有打開，就代表有些「鑰匙對」不一樣，那我們就裝作沒事，繼續執行下一個操作。

顯然「檢查」並不影響各對鑰匙是否一樣，畢竟同一對鑰匙都會同時轉動。

至於如何把每一對鑰匙轉成一樣的呢？可定義一個新的、大小為 2^k 轉盤，若某一對鑰匙「一樣」，就對應到新轉盤上的一個方向對的鑰匙，反之對應到方

向不對的鑰匙。顯然新轉盤的規則和小明遇到的轉盤一模一樣。於是由歸納法得證。

下證明 $n \neq 2^k$ 時無法在有限步之內達成目標。在此想像我們是命運之神，神，可以控制轉盤的轉法來阻撓小明成功，於是我們要證明：不管小明有甚麼策略來轉動鑰匙，我們都有辦法轉動轉盤讓小明喪心喪意，無功而返。

先看一個例子：假如 n 是奇數。在每一次轉動中，我們可以先看小明下一步準備要轉哪些鑰匙，在這其中一定有兩個相鄰的位置，小明在下一步都有轉，或是都沒有轉（因為 n 是奇數）；我們再回過頭來看現在轉盤上的鑰匙，因為小明還沒有成功，所以一定能夠找到兩個相鄰的鑰匙，他們恰好一對一錯。於是我們只要把這兩個相鄰的位置對準那相鄰的位置，這樣小明在下一步轉鑰匙後，這兩把鑰匙仍然是一對一錯。只要一直重複這個步驟下去，小明根本無法抵抗命運的捉弄，無法達成任務。

一般情形中，若 $n \neq 2^k$，那麼 n 一定有一個奇質因數 p。考慮第 $\frac{n}{p}$、$\frac{2n}{p}$、…、$\frac{(p-1)n}{p}$、n 這 p 把鑰匙，與上同樣的方法可以原封不動地運用在這 p 把鑰匙身上。於是 $n \neq 2^k$，小明可能無法達成任務。

【評分標準】

1. 宣稱若且唯若 $n = 2^k$ 可達成目的，$\frac{1}{7}$
2. 證明 $n = 4$ 可達成目的，$\frac{1}{7}$
3. 證明 $n = 2^k$ 可達成目的，$\frac{3}{7}$
4. 證明 n 為奇數時不一定能達成目的，$\frac{1}{7}$
5. 證明 $n \neq 2^k$ 時不一定能達成目的，$\frac{3}{7}$

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》