International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2009 秋季賽　高中組　初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 我們只知道某個保險箱的密碼是一組兩兩互不相同的七個數碼。當輸入七個不同的數碼後，若其中至少有一個位置的數碼與保險箱的對應密碼相吻合，則可開啟此保險箱。請問是否能用少於七次的嘗試，就保證可以打開它？（四分）

【參考解法】

用以下方式輸入，則 6 次內必可打開保險箱：

	a	b	c	d	e	f	g
(1)	1	2	3	4	5	6	0
(2)	2	3	4	5	6	1	0
(3)	3	4	5	6	1	2	0
(4)	4	5	6	1	2	3	0
(5)	5	6	1	2	3	4	0
(6)	6	1	2	3	4	5	0

若這些嘗試都無法打開，則 a、b、c、d、e、f 必是由 7、8、9 或 0 這四個數碼組成，此與 a、b、c、d、e、f 是兩兩互不相同的數碼矛盾。

【評分標準】

1. 用 7 次開保險箱，$\frac{0}{7}$
2. 提出用 6 次或以下開箱可行的解法，$\frac{5}{7}$
3. 證明該辦法必可開箱，$\frac{2}{7}$
4. 若僅證明只有 7 種數字時(非 0~9 十種數字)能用 6 次或以下開箱，$\frac{2}{7}$
5. 同上，並證明可推廣至 10 種數字的情形，$\frac{5}{7}$

2. 空間中有 A、B、C、D、E、F 六個點。已知 $AB//DE$、$BC//EF$、$CD//FA$，但 $AB\neq DE$。試證這六個點全都在同一平面上。（四分）

【參考解法】

假設六個點不全在同一平面上。可令 B、C、D 三點所在的平面為水平面。

若 A 在水平面上，因 $CD//FA$，則 F 也在水平面上，再因 $BC//EF$，故 E 也在水平面上，即六點都在水平面上，與假設矛盾，因此 A 不在水平面上，同理，E、F 也不在水平面上。

因 $BC//EF$、$CD//FA$，故 A、E、F 所在的平面與水平面為空間中的兩平行平面，再由 $AB//DE$ 可得知 A、B、D、E 四點在同一平面上，故可知 $AE//BD$，即四邊形 $ABDE$ 為平行四邊形，故 $AB=DE$，此結論與 $AB\neq DE$ 矛盾，因此假設錯誤，即 A、B、C、D、E、F 六個點全在同一平面上。

3. 請問是否存在正整數 a、b、c、d 使得 $a^3+b^3+c^3+d^3=100^{100}$？（四分）

【參考解法】

令 $a=100^{33}$、$b=2\times100^{33}$、$c=3\times100^{33}$、$d=4\times100^{33}$，則經過計算後可以得知 $a^3+b^3+c^3+d^3=100^{100}$。

【評分標準】

1. 指出 $1^3+2^3+3^3+4^3=100$，$\frac{4}{7}$
2. 計算 $(100^{33})^3+(2\times100^{33})^3+(3\times100^{33})^3+(4\times100^{33})^3=100^{100}$，$\frac{7}{7}$

4. 在一個正 2009 邊形的每條邊上各選取一點。令 S 為以這些所選出的點為頂點之 2009 邊形的面積。針對每一個所選出的點，以它所在的邊上之中點作鏡像點。試證以這些鏡像點為頂點的 2009 邊形之面積也等於 S。(四分)

【參考解法】

令正 2009 邊形的邊長為 1，且頂點依序為 A_1、A_2、A_3、…、A_{2009}。再令 $\overline{A_nA_{n+1}}$ 上所選的點為 B_n 而 $\overline{A_{2009}A_1}$ 上所選的點為 B_{2009}，及與 B_n 對應所取出的鏡像點為 C_n。可知 $\overline{A_nC_n}=\overline{A_nA_{n+1}}-\overline{A_nB_n}=1-\overline{A_nB_n}$ 且 $\overline{A_{2009}C_{2009}}=\overline{A_{2009}A_1}-\overline{A_{2009}B_{2009}}=1-\overline{A_{2009}B_{2009}}$。設正 2009 邊形面積為 X，每一個內角的角度為 θ 及 $\overline{A_nB_n}=d_n$，則 $\overline{A_nC_n}=1-d_n$。可觀察出以這些所選出的點 B_n 為頂點之 2009 邊形的面積為正 2009 邊形面積扣除 2009 個分別以 d_n、$1-d_{n-1}$ 為兩邊且其夾角為 θ 的三角形，即

$$S=X-\frac{1}{2}\sin\theta[(1-d_{2009})d_1+\sum_{n=1}^{2008}(1-d_n)d_{n+1}]，$$

同理，以 C_n 為頂點之 2009 邊形的面積為 $X-\frac{1}{2}\sin\theta[d_1(1-d_{2009})+\sum_{n=1}^{2008}d_{n+1}(1-d_n)]$，故這兩個 2009 邊形之面積相等。

【評分標準】

1. 以變數(長度、角度、…)表示原 2009 邊形面積，$\frac{2}{7}$
2. 以相同變數表示新 2009 邊形面積，$\frac{3}{7}$
3. 以代數證明其面積相同，$\frac{2}{7}$

5. 某國家有南北二個首都及數個城市，它們之間有些有道路相連接。這些道路中有些是收費道路，用路人通過收費道路時都必須要繳費。已知從南方的首都到北方的首都的任何路徑都至少包含有十條收費道路。試證所有的收費道

路可以分屬十家不同的公司，使得任何人駕車從南方的首都到北方的首都都必須向每家公司支付過路費。（五分）

【參考解法】

將所有能以非收費道路連接的城市稱之為一個都會區，則可知在都會區內的城市可自由移動不收費，而都會區內的城市到另一個都會區內的城市則必須收費。現從南方的首都出發，令南方的首都所在之都會區為 0 號都會區，將 0 號都會區有收費道路連接的其它都會區稱為 1 號都會區，接著將 1 號都會區有收費道路連接且尚未編號的其它都會區稱為 2 號都會區，以此類推，則因從南方的首都到北方的首都的任何路徑都至少包含有十條收費道路，故北方的首都所在之都會區之編號至少為 10 號都會區，否則將會有一條路徑收費在九次以下。現將

0 號都會區至 1 號都會區的收費道路給第一家的公司、
1 號都會區至 2 號都會區的收費道路給第二家的公司、
2 號都會區至 3 號都會區的收費道路給第三家的公司、
3 號都會區至 4 號都會區的收費道路給第四家的公司、
4 號都會區至 5 號都會區的收費道路給第五家的公司、
5 號都會區至 6 號都會區的收費道路給第六家的公司、
6 號都會區至 7 號都會區的收費道路給第七家的公司、
7 號都會區至 8 號都會區的收費道路給第八家的公司、
8 號都會區至 9 號都會區的收費道路給第九家的公司、
其餘的收費道路給第十家的公司，
即可讓所有的收費道路可以分屬十家公司，使得任何人駕車從南方的首都到北方的首都都必須向每家公司支付過路費。

【評分標準】

1. 舉出一可行的道路分配方法，$\frac{3}{7}$
2. 證明此分配方法滿足題意，$\frac{4}{7}$

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》