International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

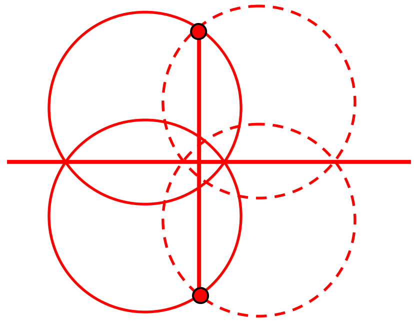
2010 秋季賽　國中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 用一個圓形硬幣可以畫出通過平面上給定的一個點或二個點的圓。現給定平面上一條直線，請問如何運用此硬幣構造出兩個點，使得這兩個點的連線垂直此給定的直線？請注意：用此硬幣無法做出與給定直線相切的圓。(四分)

【參考解法】

1. 在直線上取出兩個距離小於硬幣直徑的點。然後畫出兩個通過這兩個點的圓，可知這兩個圓必是以直線為對稱軸的兩個圓。
2. 重複以上步驟，但所畫出的圓必須與步驟 1.中所畫出的圓有交點。
3. 步驟 2.中所得的兩個交點，恰是互為以給定直線為對稱軸的兩個點，因此這兩個點即為所求。



【評分標準】

(1) 構造正確的作法，$\frac{6}{7}$

(2) 證明做出的直線與原直線垂直，$\frac{1}{7}$

2. 小皮有一個特殊的製圖工具，可以標出任何一個線段的中點，也可以在此線段內標出一個點，使得這個點將此線段分為長度比為 $n:n+1$ 的兩條小線段，其中 n 為任意正整數。小皮宣稱運用此工具可以在任何一條線段內標出一個點，使得這個點將此線段分為長度比為 $p:q$ 的兩條小線段，其中 p、q 為任意正整數。請問小皮的話是否為真？（五分）

【參考解法】

小皮是正確的。

若小皮被要求在一條線段內標出一個點，使得這個點將此線段分為長度比為 $p:q$ 的兩條小線段，其中 p、q 為互質的正整數時，他事實上是要將此線段分成 $p+q$ 個單位長度的線段。若線段的長度為大於 1 的偶單位長度，則可將其中點標出；若線段的長度為大於 1 的奇單位長度 $2n+1$，則可將標出將線段分為 $n:n+1$ 的點。如此操作下去，最終所標出的點中，相鄰兩點之間的線段長度即為單位長度，如此便可標出一個點，使得這個點將此線段分為長度比為 $p:q$ 的兩條小線段。

【評分標準】

提出可行的作法，$\frac{7}{7}$

3. 在一個圓形跑道上，10 位自行車選手同時從同一點同向以不同的均勻速度出發。若兩位自行車選手在同時刻再度位於同地點，則稱之為「相遇」。已知沒

有三位或三位以上的自行車選手同時刻相遇在同一點。任兩位自行車選手都至少再相遇過一次，請證明在最後一對選手第一次相遇之際，每位自行車選手與其他選手相遇次數之總和至少 25 次。(八分)

【參考解法】

令自行車手 C_i 的速度為 v_i 使得 $v_1 < v_2 < \cdots < v_{10}$，其中 $1 \le i \le 10$。

再令 $u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \cdots, v_{10} - v_9\}$，則知若 $j > i$ 時，$v_j - v_i \ge (j-i)u$。

接著令圓形跑道的長度為 d，則可知從最後一對選手在每經過時間 $\dfrac{d}{u}$ 則相遇一次，而車手 C_i 與 C_j 每經過時間 $\dfrac{d}{v_j - v_i}$ 則相遇一次。

由 $v_j - v_i \ge (j-i)u$ 可知 $(j-i)\dfrac{d}{v_j - v_i} \le \dfrac{d}{u}$，故知車手 C_i 與 C_j 在每經過時間 $\dfrac{d}{u}$，必至少相遇 $j-i$ 次。因此對於車手 C_i 來說，必分別與車手 C_1、C_2、…、C_{i-1} 相遇 $1+2+\cdots+(i-1)$ 次以及分別與車手 C_{i+1}、C_{i+2}、…、C_{10} 相遇 $1+2+\cdots+(10-i)$ 次，合計共與其他車手至少相遇 $\dfrac{i(i-1)+(10-i)(10-i+1)}{2} = (i-5)(i-6)+25 \ge 25$ 次。

【評分標準】

(1) 考慮將選手依速度排序，並注意兩兩差值，$\dfrac{1}{7}$

(2) 用速度差計算相遇次數，$\dfrac{4}{7}$

(3) 證明命題，$\dfrac{7}{7}$

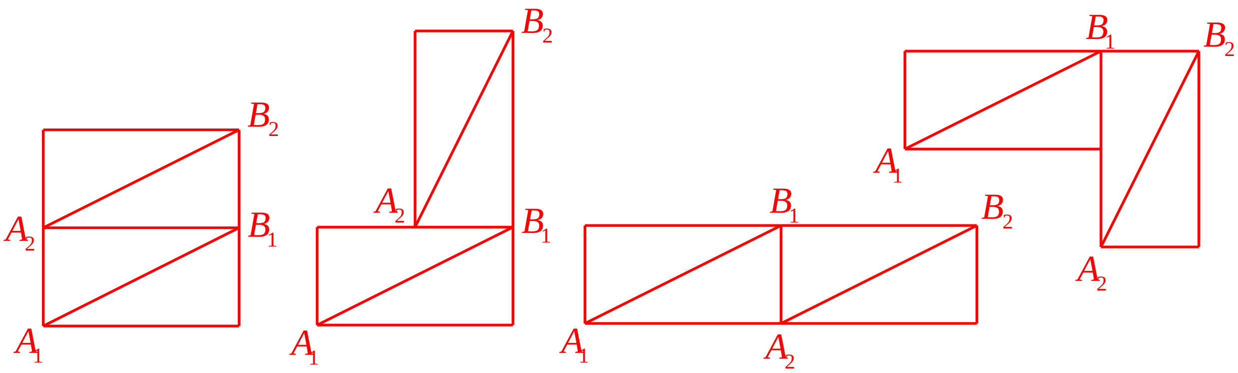
註：以上皆不累加

4. 一個大矩形可分割為許多 1×2 或 2×1 的小矩形。在每個小矩形內各劃上一條對角線，使得沒有任何兩條對角線有共同的端點。請證明這個大矩形恰只有二個頂點是這些對角線的端點。(八分)

【參考解法】

我們將先證明大矩形至少有一個頂點是一條對角線的端點。在以下的證明中，將以多明諾骨牌來表示 1×2 或 2×1 的小矩形。考慮位於大矩形右下角位置的多明諾骨牌，若在上面劃出的對角線是從右下角至左上角的，則大矩形的右下角頂點即是這一條對角線的端點；故現考慮在這一片多明諾骨牌上劃出的對角線是從左下角至右上角的，則以大矩形下方的邊為邊的多明諾骨牌，上面所劃出的對角線必須都是從左下角至右上角的，因此大矩形的左下角頂點會是一條對角線的端點。

我們可令一片多明諾骨牌的左下角 A_1 是從左下角至右上角的對角線 $\overline{A_1B_1}$ 的一個端點，而 B_1 為另一片多明諾骨牌除了左下角以外的一個頂點，則可得到如下圖所示的幾種排列情形，其中對角線 $\overline{A_2B_2}$ 也是從左下角至右上角的，此時 B_2 在位於 B_1 的上方或右方。



以此方式繼續下去，我們可以在大矩形裡構造一個從左下角頂點連接到右上角頂點的多明諾骨牌鏈。但我們並無法利用類似方式同時構造一個從右下角頂點連接到左上角頂點的多明諾骨牌鏈，這是因為若同時可構造出像這樣子的兩條多明諾骨牌鏈，則必有一塊多明諾骨牌會同時落在這兩個多明諾骨牌鏈中，亦即該多明諾骨牌會劃上兩條對角線，矛盾。因此大矩形恰只有二個頂點是這些對角線的端點。

【評分標準】

(1) 發現對角線必同向，且畫出 $n\times m$ 、$n\geq 4$ 的一種畫法，$\frac{1}{7}$

(2) 發現有大於或等於 2 個頂點是對角線端點，或發現若一個頂點非端點，則相鄰 2 個頂點必是端點，$\frac{3}{7}$

(3) 發現有小於或等於 2 個頂點是對角線端點，或發現若一個頂點非端點，則相鄰 2 個頂點必是端點，$\frac{3}{7}$

5. 任意給定一個五邊形，將每一個邊長除以其他四個邊長之總和，再將所得之所有分數值相加，請證明所得之和小於 2。（八分）

【參考解法】

令五邊形的五個邊長為 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 並滿足 $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq a_5<p-a_5$，其中 $p=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$，則由 $p>2a_5$ 可得：

$$\frac{a_1}{p-a_1}+\frac{a_2}{p-a_2}+\cdots+\frac{a_5}{p-a_5}\leq\frac{a_1}{p-a_5}+\frac{a_2}{p-a_5}+\cdots+\frac{a_5}{p-a_5}\leq\frac{p}{p-a_5}<2\text{。}$$

【評分標準】

(1) 做出三角形的情況，$\frac{1}{7}$

(2) 成功使用調整方法，$\frac{3}{7}$；成功使用調整且做出三角形的情況，$\frac{4}{7}$

(3)使用調整方法調整成三角形的情況，$\frac{5}{7}$；調成三角形的情況且做出三角形的情況，$\frac{7}{7}$

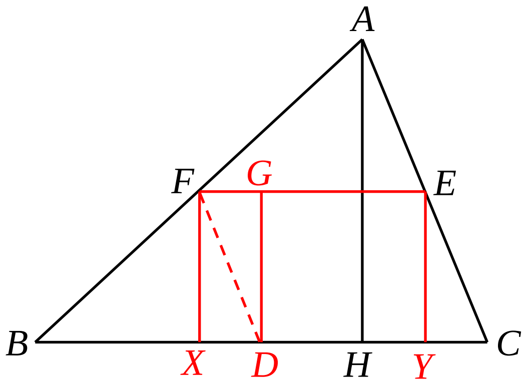
(4)其他可行的方法，$\frac{7}{7}$

6. 在銳角三角形 ABC 的高 AH 上任選一點 P。令點 E 與 F 分別為邊 CA 與 AB 的中點。從點 E 與 F 分別作直線 CP 與 BP 的垂線，且此兩垂線交於點 K。請證明 $KB=KC$。(八分)

【參考解法 1】

令 D 為 BC 的中點且在 EF 上取一點 G 使得 $DG\perp EF$，如圖所示。現在先證明：

$$BH\times FG=CH\times EG\ 。$$

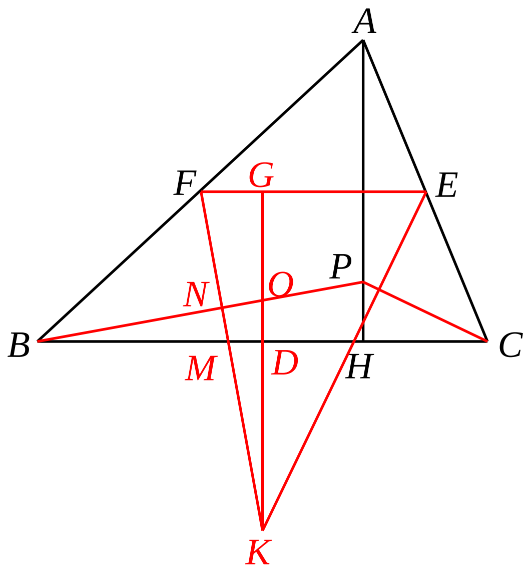


由 E、F 分別往 BC 做垂線並分別交 BC 於 Y、X。則可由 E 與 F 分別為 CA 與 AB 的中點以及 $AH//FX//EY$ 得知 Y、X 分別為 CH、BH 的中點。

接著連接 FD，則可由 $\angle FXD=90^\circ=\angle EYC$、$FD=\dfrac{1}{2}AC=EC$ 及 $FX=\dfrac{1}{2}AH=EY$ 知 $\triangle FDX\cong\triangle ECY$，因此 $XD=YC=YH$，故 $XH=YD$。所以可得

$$BH\times FG=2XH\times XD=2YH\times YD=CH\times EG$$

現回到原題。令 D 為 BC 的中點且在 EF 上取一點 G 使得 $DG\perp EF$，如圖所示。



延長 GD 至 K_1 點，其中 K_1 滿足 $FK_1\perp BP$。

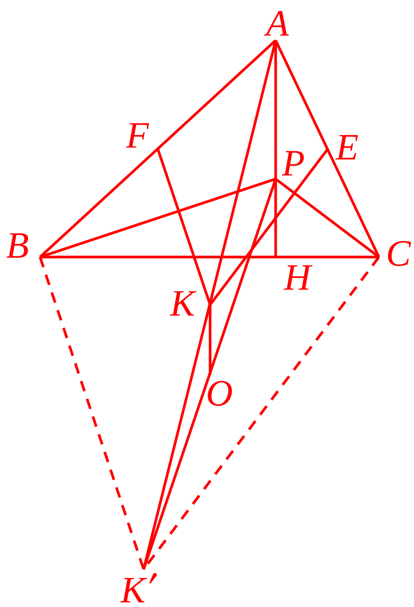
可知 M、N、O、D 四點共圓，因此 $\angle BPH=\angle BOD=\angle K_1MD=\angle K_1FG$；再因 $\angle FGK_1=90^\circ=\angle BOH$ 可知 $\triangle FGK_1\sim\triangle PHB$，故得 $GK_1=\dfrac{FG\times BH}{PH}$。

再延長 GD 至 K_2 點，其中 K_2 滿足 $EK_2\perp CP$。則由類似的推導過程可得 $GK_2=\dfrac{EG\times CH}{PH}$。

因 $BH\times FG=CH\times EG$，故知 $GK_1=GK_2$，由此可知 K_1 與 K_2 即為同一個點，令其為點 K；再因 K 在 BC 的中垂線 GD 上，因此 $KB=KC$。

【參考解法 2】

延長 AK 至 K' 使得 $AK=KK'$。連接 PK'。



在 $\triangle ABK'$ 中，F、K 分別為 AB、AK' 中點，故知 $BK'//FK$；因 $FK\perp BP$，故得 $BK'\perp BP$，$\angle PBK'=90^\circ$。同理，$\angle PCK'=90^\circ$。故可知 B、P、C、K' 四點共圓，其直徑為 PK'，圓心為 PK' 中點 O，且由 $OB=OC$ 可知 O 在 BC 的中垂線上。

連接 OK，則在 $\triangle APK'$ 中，O、K 分別為 PK'、AK' 中點，故知 $OK//AH$；再因 $AH\perp BC$，故可得直線 OK 與 BC 垂直，因此直線 OK 即為 BC 的中垂線，由此可推得 $KB=KC$。

【評分標準】

給出完整證明，$\frac{7}{7}$

7. 亞瑟王的助手梅林召集 n 位騎士開會，每一天他都安排這些騎士圍坐在有 n 個的座位之圓桌開會。第 $k(k\geqq 2)$天時，梅林安排這些騎士就坐後，騎士可進行以下操作：圓桌之任意兩位鄰座的騎士，若在第一天沒有相鄰而坐，則他們可以互相交換座位。同一天內他們可以操作任意多次，並將曾經出現過的環形座位順序記錄下來。騎士們試圖使得他們的環形座位順序在之前的記錄中曾經出現過，若出現此情況，他們就可以終止會議，否則會議必須繼續。梅林欲使會議召開天數越多越好，請問梅林可以保證召開多少天會議？(註：騎士的座位順時針旋轉視為其環形座位順序相同。)（十二分）

【參考解法】

我們假設騎士在圓桌上就座是依順時針方向從 1 號開始依序至 n 號，則知可將 1 與 n 視為連續的號碼，且交換座位時將不允許兩個第一天座位號碼連續的騎士交換座位。下面我們將對於一個循環的順序構造一個不變量，並稱之為繞圈數。假設梅林有一些疊在一起的帽子，並由上至下依序從 1 開始編號到 n。他從給 1 號騎士 1 號帽子開始依圓桌的順時針方向繞圈，直到發現 2 號騎士給他 2 號帽子。這樣子一直繞圈下去，在梅林發完全部的帽子後，他再回到開始的 1 號騎士面前。梅林在這一過程中，對這圓桌繞的圈數便稱為繞圈數。舉例來說，座位上騎士號碼的循環順序 1 4 7 2 3 6 5 之繞圈數為 4：(1, 2, 3)(4, 5)(6)(7)。

現假設有兩位相鄰的騎士互換位置。

若其中沒有 1 號騎士，則帽子在每一輪發放的情況時仍然一樣，故繞圈數仍是一個常數。

若是 1 號騎士與 h 號騎士互換位置，其中 $h\neq 2$ 或 n。則 h 號騎士在下一個週期中會變為第一個拿到帽子的騎士以取代在前一個週期中最後一個拿帽子的騎士，反之亦然。故繞圈數仍是一個常數。

此時若到了會議的第 k 天，其中$1\leq k\leq n-1$，梅林可從騎士的座位編號為 k、$k-1$、…、2、1、$k+1$、$k+2$、…、n 開始發放，則可知此時繞圈數在這第 k 天時為 k。故可得知沒有循環順序在前$n-1$天裡的兩天是重複的，因此梅林可使會議至少召開 n 天。

接下來我們將驗證任給一組循環順序，它都可以轉換成一組梅林召開會議時某一天的循環順序。若為真，則便可推知騎士們可在第 n 天使會議結束。

若存在一組循環順序不可以轉換成一組梅林召開會議時某一天的循環順序，我們將使 2 號騎士以順時針方向前進直到他與 1 號騎士相鄰。這是辦得到的，因為若 2 號在順時針方向與 1 號間沒有 3 號時，可透過一連串的座位交換而達成，若 2 號在順時針方向與 1 號間有 3 號時，則可將他們兩位一起往 1 號前進。最終，我們將使得 2 號、3 號、…、h 號與 1 號騎士在同一區域內。現有 $h<n$，否則最初的循環順序將會是一組梅林召開會議時某一天的循環順序。所以我們可使 1 號騎士以逆時針方向與 2 號騎士相鄰，現要使 3 號騎士與 2 號騎士在另一邊相鄰。如同前述的操作手法，可使 3 號、4 號、…、l 號、2 號與 1 號騎士在同一區

域內。若 $l<n$，則可使 2 號與 1 號騎士以逆時針方向往 3 號騎士前進；若 $l=n$，1 號騎士雖無法經過，可注意到其已成為一組梅林召開會議時某一天的循環順序。故得證。

【評分標準】

(1) 猜出答案並構造出 $n\geq 5$ 的安排法，$\frac{1}{7}$

(2) 構造出 $n\in N$ 的安排法，$\frac{3}{7}$

(3) 證明此安排法兩兩不可互相轉換，$\frac{1}{7}$

(4) 證明任何座位安排皆可轉換至某 $n-1$ 安排方法中，$\frac{3}{7}$

註：(1)(2)不累加

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》