

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

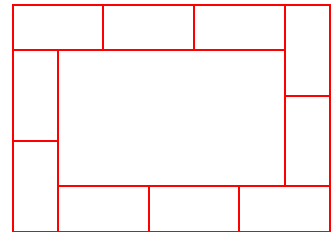
2010 秋季賽 國中組 初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有一張乘法表，在每個第 i 行第 j 列的格子內都填入乘積 ij 。從表中任意截取一個 $m \times n$ 的矩形表格，其中 m, n 皆為奇數。將這個表格內部的 $(m-2)(n-2)$ 矩形移除，而剩下一個寬度為 1 的框架。將此框架內的小方格黑白相間塗色。請證明在此框架內黑色小方格內所填的數之總和等於白色小方格內所填的數之總和。(四分)

【參考解法】

令框架的上緣為第 a 行、下緣為第 b 行、左側為第 c 列、右側為第 d 列。由已知條件知此框架可由 1×2 的多明諾骨牌組成，如圖所示。不妨令其中一個角落的小方格為黑色小方格，則所有角落的小方格都是黑色的。可再令在黑色小方格上的數皆為正值而在白色小方格上的數皆為負值，則在第 a



行上共有 $\frac{d-c}{2}$ 個多明諾骨牌且每一個骨牌上數字之總和為 $-a$ 、在第 b 行上共有

$\frac{d-c}{2}$ 個多明諾骨牌且每一個骨牌上數之總和為 b 、在第 c 列上共有 $\frac{b-a}{2}$ 個多明

諾骨牌且每一個骨牌上數之總和為 c 以及在第 d 列上共有 $\frac{b-a}{2}$ 個多明諾骨牌且每一個骨牌上數之總和為 $-d$ 。故框架內所有小方格的數之總和為

$$\frac{1}{2}(-a(d-c) + b(d-c) + c(b-a) - d(b-a)) = 0,$$

意即框架內黑色小方格內所填的數之總和等於白色小方格內所填的數之總和。

【評分標準】

(1) 證明左上角數字 1×1 的情況， $\frac{4}{7}$

(2) 兩兩分組討論，但每組間的差值算錯， $\frac{4}{7}$

(3) 直接計算和，但項數過多，是否相等並不顯然， $\frac{5}{7}$

(4) 完整證明命題， $\frac{7}{7}$

註：以上皆不累加

2. 在四邊形 $ABCD$ 內有一個內切圓。已知 $AB = CD$ 、 $BC < AD$ 且 $BC \parallel AD$ 。請證明 $\angle C$ 的平分線均分四邊形 $ABCD$ 的面積。(四分)

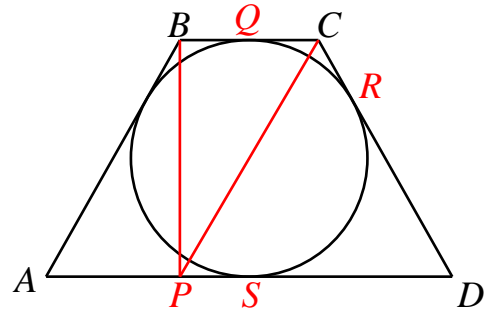
【參考解法】

在AD上取P點使得BP ⊥ AD，且令四邊形ABCD的內切圓分別與BC、CD、AD切於Q、R、S，並連接BP、CP，如圖所示。則可知

$CD=CR+DR=CQ+DS=BQ+DS=PS+DS=PD$ ，
因此 $\angle DCP = \angle DPC = \angle BCP$ ，即CP為 $\angle C$ 的平分線。故可得

$$BC+AP=BQ+QC+AP=2PS+AP=PS+AS=PS+SD=PD$$

因四邊形ABCP的面積為 $\frac{1}{2}BP(BC+AP)$ 而三角形CDP的面積為 $\frac{1}{2}BP \times DP$ ，所以CP均分四邊形ABCD的面積。



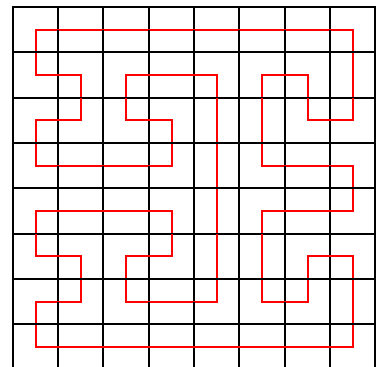
【評分標準】

完整證明命題， $\frac{7}{7}$

3. 將一個 $1 \times 1 \times 1$ 的正立方體骰子置於 8×8 的方格表上，骰子的底面正好與方格表的小方格吻合。骰子可以在方格表上以骰子的任一底邊為軸滾動而使骰子與底面相鄰的面滾到方格表的另一小方格上。依此方法繼續滾動骰子並經過方格表上的每個小方格至少一次。請問是否可能使骰子的某個面不曾與方格表接觸過？（四分）

【參考解法】

這是可以做到的，其路徑如右圖所示。為了方便描述，令骰子是從左上角的小方格開始出發，且底面為2、左面為3、頂面為5、右面為4、前面為6而後面為1，則骰子沿路徑往右開始滾，與方格表接觸的面依序為4、5、3、2、4、5、3、6、4、5、6、3、5、4、6、3、2、6、5、4、2、6、4、5、6、2、4、5、3、2、4、5、3、6、5、4、6、2、4、5、3、6、5、4、6、3、5、4、2、3、5、6、2、3、6、5、3、2、4、6、2、3、6、5，可發現1從未與方格表接觸。



【評分標準】

做法A：定義某種步驟，並宣稱反覆進行此步驟可達到目的

(1) 正確， $\frac{7}{7}$

(2) 存在少數格可簡單補足的漏失， $\frac{5}{7}$

(3) 存在少數格無法補足的漏失， $\frac{2}{7}$

做法B：直接畫出做法

(3) 正確， $\frac{7}{7}$

(4) 做法未完整，但已知如何「轉彎」， $\frac{2}{7}$

(轉彎：前後曾滾過某一直行以及某一橫列，或是滾過超過 3 行/列)

註：以上皆不累加

4. 某校有超過 90% 的學生同時選修英文與德文，且有超過 90% 的學生同時選修英文與法文。請證明同時選修德文與法文的學生中，有超過 90% 也選修英文。
(四分)

【參考解法】

令該校總共有 T 位學生，其中有 w 位學生同時選修英文、法文與德文、 x 位學生同時選修英文與法文而未選修德文、 y 位學生同時選修英文與德文而未選修法文、 z 位學生同時選修德文與法文而未選修英文。則由題意可知

$$\frac{w+x}{T} > \frac{9}{10} \text{ 以及 } \frac{w+y}{T} > \frac{9}{10}。$$

因 $\frac{w+x}{w+x+y+z} \geq \frac{w+x}{T} > \frac{9}{10}$ ，故知 $w+y > 9(x+z)$ ；

同理，也可得知 $w+x > 9(y+z)$ 。

因此 $2w+9(x+y) > (w+x) + (w+y) > 9(x+z) + 9(y+z) = 9(x+y) + 18z$ ，即

$$w > 9z$$

故知 $10w > 9(w+z)$ ，換言之可得 $\frac{w}{w+z} > \frac{9}{10}$ 。

【評分標準】

- (1) 證明特殊情況（如設全校有 100 名學生）， $\frac{0}{7}$
- (2) 證明同時選修英法德文的學生超過 80%， $\frac{2}{7}$
- (3) 完整證明命題， $\frac{5}{7}$

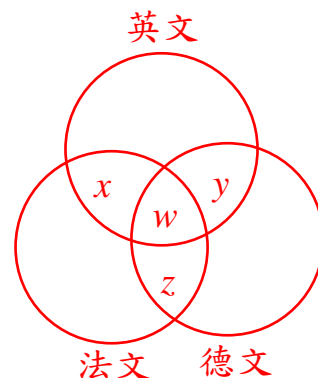
5. 有 N 條弦的端點將圓分割為 $2N$ 段長度都為 1 的弧。已知每條弦都將圓分割為兩段長度為偶數的弧，請證明 N 為偶數。(四分)

【參考解法】

將圓上這 N 條弦的 $2N$ 個端點用黑白相間塗色。因每條弦都將圓分割為兩段長度為偶數的弧，故每條弦的兩個端點必定同色，故圓上有偶數個黑點且有偶數個白點。再因每個顏色都有 N 個點，故 N 必為偶數。

【評分標準】

完整證明命題， $\frac{7}{7}$



《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》