International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

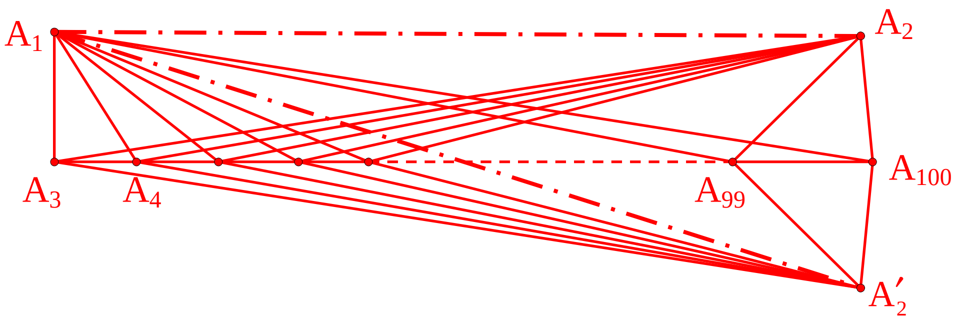
2010 秋季賽　高中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 平面上有 $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ 一百個點，丈量出這些點兩兩之間的距離，並在紙上記錄出所有 4950 個距離 $D(A_i, A_j)=d_{ij}$。
   (a) 僅有一個記錄 $D(A_1, A_2)=d_{12}$ 被擦除。請問利用剩下來的資料是否保證可以正確地重新填回這個資料？（二分）
   (b) 假設任意三點不在同一直線上，其中有 k 個記錄被擦除，請問保證可以正確地重新填回所有資料的最大 k 值是什麼？（三分）

【參考解法】

(a)無法保證。若 A_3、A_4、…、A_{100} 這 98 個點在同一直線上而 A_1、A_2 在線外，如下圖所示：



則 $D(A_1, A_2)=d_{12}$ 被擦除後而其他記錄均保留時，無法判定 A_2 的位置，故無法確定 $D(A_1, A_2)=d_{12}$ 之值。

(b)最大 k 值是 96。

假設有 97 個記錄被擦除。若這些被擦除的記錄都與點 A 有關，則我們僅知道 AB、AC 的長度，其中 B、C 為其餘 99 個點中的兩個點。因任意三點不在同一直線上，故 A 不在 BC 上，此時我們無法得知 A 在直線 BC 的哪一側，故無法正確地重新填回所有的資料。

現假設最多 96 個記錄被擦除。建構一個以這 100 個點為頂點的圖，若兩個點之間的距離記錄被擦除，則將這兩個頂點用一條邊連接它們。可知此圖最多有 96 條邊，且可知此圖至少有四個組成部分。從四個部分裡各挑選出一個頂點 A、B、C、D，則這四個點兩兩之間的距離都是未被擦除的，故可確定這四個點的相對位置。對於任何一個其它的頂點 P 而言，它只能與這四個點中的某一個頂點位於相同的組成部分中，也因此可知 P 與 A、B、C、D 中的三點的距離是未被擦除的，利用這些記錄這就足以確定點 P 與 A、B、C、D 的相對位置。如此繼續操作下去，便可正確地重新填回所有的資料。

【評分標準】

(a) (1) 猜對答案，$\frac{1}{7}$

(2) 考慮到共線與對稱，$\frac{4}{7}$

(3) 完整給出證明，$\frac{7}{7}$

註：(1)(2)不累加

(b) (1) 猜對答案，$\frac{1}{7}$

(2) 完整給出證明，$\frac{7}{7}$

2. 在一個圓形跑道上，$2n$ 位自行車選手同時從同一點同向以不同的均勻速度出發。若兩位自行車選手在同時刻再度位於同地點，則稱之為「相遇」。已知沒有三位或三位以上的自行車選手同時刻相遇在同一點。任兩位自行車選手都至少再相遇過一次，請證明在最後一對選手第一次相遇之際，每位自行車選手與其他選手相遇次數之總和至少 n^2 次。（六分）

【參考解法】

令自行車手 C_i 的速度為 v_i 使得 $v_1 < v_2 < \cdots < v_{2n}$，其中 $1 \le i \le 2n$。

再令 $u=\min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \cdots, v_{2n} - v_{2n-1}\}$，則知若 $j > i$ 時，$v_j - v_i \ge (j-i)u$。

接著令圓形跑道的長度為 d，則可知從最後一對選手在每經過時間 $\frac{d}{u}$ 則相遇一次，而車手 C_i 與 C_j 每經過時間 $\frac{d}{v_j - v_i}$ 則相遇一次。

由 $v_j - v_i \ge (j-i)u$ 可知 $(j-i)\frac{d}{v_j - v_i} \le \frac{d}{u}$，故知車手 C_i 與 C_j 在每經過時間 $\frac{d}{u}$，必至少相遇 $j-i$ 次。而對於車手 C_i 來說，必分別與車手 C_1、C_2、$\cdots$、C_{i-1} 相遇 $1+2+\cdots+(i-1)$ 次且分別與車手 C_{i+1}、C_{i+2}、$\cdots$、C_{2n} 相遇 $1+2+\cdots+(2n-i)$ 次，合計與其他車手至少相遇 $\frac{i(i-1)+(2n-i)(2n-i+1)}{2} = (i-n)(i-(n+1))+n^2 \ge n^2$ 次。

【評分標準】

(1) 發現速度差最小的二人最晚相遇，$\frac{1}{7}$

(2) 總次數至少 $(1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+(2n-1-k))$ 次，$\frac{4}{7}$

(3) 完整給出證明，$\frac{7}{7}$

註：(1)(2)不累加

3. 任意給定一個多邊形，將每一個邊長除以其他所有邊長之總和，再將所得之所有分數值相加，請證明所得之和小於 2。（六分）

【參考解法】

令多邊形的邊長為a_1、a_2、…、a_n並滿足$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n < p-a_n$，其中$p = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，則由$p > 2a_n$可得：

$$\frac{a_1}{p-a_1}+\frac{a_2}{p-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{p-a_n} \le \frac{a_1}{p-a_n}+\frac{a_2}{p-a_n}+\cdots+\frac{a_n}{p-a_n} \le \frac{p}{p-a_n} < 2\text{。}$$

【評分標準】

(1) 做出三角形的情況，$\frac{1}{7}$

(2) 成功使用調整方法，$\frac{3}{7}$；成功使用調整且做出三角形的情況，$\frac{4}{7}$

(3)使用調整方法調整成三角形的情況，$\frac{5}{7}$；調成三角形的情況且做出三角形的情況，$\frac{7}{7}$

(4)其他可行的方法，$\frac{7}{7}$

4. 兩位魔法師在海平面上方 100 公尺處互相鬥智。他們輪流施行咒語，而每次咒語之形式都如：「將我的高度降 a 公尺並將我的對手的高度降 b 公尺。」其中 a、b 為實數且 $0<a<b$，不同的咒語有不同的 a 與 b 值。兩人所採用咒語的集合相同，這些咒語可用任何順序施行，且同一咒語可施行許多次。如果施行完某個咒語後，能使他自己仍保持在水面之上方而他的對手則在水面之下方，便稱這一位魔法師獲勝。

(a) 請問是否存在一組咒語之數量為有限多個的集合，使得後手的魔法師保證有策略可以獲勝？（二分）

(b) 請問是否存在一組咒語之數量為無限多個的集合，使得後手的魔法師保證有策略可以獲勝？（五分）

【參考解法】

(a)這是不可能存在的。若存在有限多個咒語的集合，則可以找到一個兩人間的高度差 $b-a$ 是最大值的情況。若先手的魔法師先講了這句咒語，後手的魔法師能做的最佳選擇便是講一樣的咒語而使兩人的相對高度維持一樣的情況。由此可知將會是後手的魔法師先降到水面而使先手獲勝。

(b)這是可以存在的。可令第 n 句咒語為$a=\frac{1}{n}$、$b=100-\frac{1}{n}$。由對稱性可假設是先手的魔法師施行了第 n 句咒語，此時先手的魔法師在海平面上方$100-\frac{1}{n}$公尺處而後手的魔法師在海平面上方$\frac{1}{n}$公尺處，接著只要後手的魔法師施行第 n+1 句咒語，則自己位於海平面上方$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$公尺處而先手的魔法師

必因 $(100-\frac{1}{n})-(100-\frac{1}{n+1})=-\frac{1}{n(n+1)}<0$ 而位於水面之下方，即後手獲勝。

【評分標準】

(a) (1) 猜對答案，$\frac{1}{7}$

(2) 完整給出證明，$\frac{7}{7}$

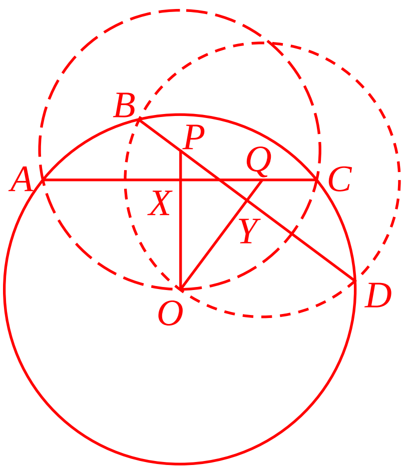
(b) (1) 猜對答案，$\frac{0}{7}$

(2) 完整給出證明，$\frac{7}{7}$

5. 四邊形 $ABCD$ 內接於圓 O，其對角線 AC 與 BD 均不通過圓心 O。假設三角形 AOC 外接圓的圓心落在直線 BD 上，請證明三角形 BOD 之外接圓的圓心落在直線 AC 上。（八分）

【參考解法】

令 P 為三角形 OAC 的外接圓圓心。則可知 PO 與 AC 垂直，並令 PO 與 AC 交點為 X。過 O 做 BD 的垂直線交 BD 於 Y、交 AC 於 Q。則只需驗證 Q 即為三角形 OBD 的外接圓之圓心。由畢氏定理可得：



$$\begin{aligned}
QD^2 &= QY^2+DY^2\\
&=QY^2+(OD^2-OY^2)\\
&=QY^2+OA^2-(OP^2-PY^2)\\
&=OA^2-AP^2+PQ^2\\
&=QX^2+OA^2-(AP^2-PX^2)\\
&=QX^2+(OA^2-AX^2)\\
&=QX^2+OX^2\\
&=QO^2
\end{aligned}$$

故知 $QB=QD=QO$，因此 Q 即為三角形 OBD 的外接圓之圓心。

【評分標準】

不部分給分，需完整給出證明，$\frac{7}{7}$

6. 在 1000×1000 方格表的每個小方格內都填入一個 0 或 1。請證明我們保證可以從此方格表中找到 10 列，使得這 10 列中的每一行都至少有一個小方格內的數是 1；或者可以找到 10 行，使得這 10 行中的每一列中都至少有一個小方格內的數是 0。（十二分）

【參考解法】

令 $S(p,r)$ 代表以下命題：

在 $a\times b$ 方格表的每個小方格內都填入一個 0 或 1，其中 $ab\le p$，則存在 r 列，

使得這 r 列中的每一行都至少有一個小方格內的數是 1；或者可以找到 r 行，使得這 r 行中的每一列中都至少有一個小方格內的數是 0。

則本題即為驗證 $S(1000^2,10)$ 成立。現先驗證以下引理：

【引理 1】若 $q>p$，則由 $S(p,r)$ 可推得 $S(q,r)$。

此由命題定義即可得知。

【引理 2】由 $S(p,r)$ 可推得 $S(4p,r+1)$。

<證> 已知 $S(p,r)$。

現給定一個 $a\times b$ 方格表，其中 $ab\le 4p$，且此方格表所有的 b 個列中，0 的個數最少的那列共有 y 個 0、以及所有的 a 個行中，1 的個數最少的那行共有 x 個 1。則知此方格表至少有 by 個 0、ax 個 1，即

$$ax+by\le ab$$

再由算幾不等式可得知

$$\sqrt{(ax)(by)}\le\frac{ax+by}{2}$$

故有 $\sqrt{(ax)(by)}\le\frac{ab}{2}$，即 $xy\le\frac{ab}{4}$。

任取一列有 y 個 0，稱之為 C 列、任取一行有 x 個 1，稱之為 R 列。接著取出在 C 列中為 0 的行，共 y 行，以及取出在 R 行中為 1 的列，共 x 列。位於這 y 行 x 列交會的方格構成一個 $x\times y$ 的子方格表，且知 $xy\le\frac{ab}{4}\le p$，故由 $S(p,r)$ 知子方格表裡存在 r 列，使得這 r 列中的每一行都至少有一個小方格內的數是 1；或者可以找到 r 行，使得這 r 行中的每一列中都至少有一個小方格內的數是 0。將這 r 列與 C 列一起考慮即知原始 $a\times b$ 方格表中有 $r+1$ 列，其每一行都至少有一個小方格內的數是 1；再將這 r 行與 R 行一起考慮即知原始 $a\times b$ 方格表中有 $r+1$ 行，其每一列都至少有一個小方格內的數是 0。故 $S(4p,r+1)$ 得證。

【引理 3】由 $S(16,2)$ 為真。

<證> 此時只需驗證 1×16、2×8、3×5、4×4、5×3、8×2 與 16×1 這幾個方格表的情況，因其餘滿足 $ab\le16$ 的方格表皆為以上這七個方格表裡其中一個的子方格表，再由【引理 1】即可得證。

(i) 1×16 方格表：有 1 就選 1 所在之列，反之即為此行。

			1												

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(ii) 2×8 方格表：若有二個 1 在同一列就選該列，反之將此二行都選取，每列都至少一個 0。

1							
1							

0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1

(iii) 3×5 方格表：

(a) 有兩個 1 在同一列：不妨假設該列為以下情形：

0				
1				
1				

若第一行有 1，則選擇有 1 的那一列與第一列，否則便選擇第一行，全為 0。

(b) 不然，便是不多於五個 1。由鴿籠原理知某一行至少有四個 0，不妨設為以下情形：

0	0	0	0	

則選取第一行與剩餘那列有 0 的一行。

(iv) 4×4 方格表：若有任一列有三個 1 或任一行有三個 0，則仿 3×5 方格表(a)的證明即可取出；不然便是每行每列中都有二個 0、二個 1。仿造【引理 2】的構造手法可取出 2×2 的子方格表，由方格位置可有以下兩類情況：

0	1	1	0
1			
0			
1			

1	0	1	0
0			
1			
0			

此皆可解。

故由【引理 1】、【引理 2】、【引理 3】可知：

$$S(16,2)\Rightarrow S(64,3)\Rightarrow S(256,4)\Rightarrow\cdots\Rightarrow S(1048576,10)\Rightarrow S(1000^2,10)$$

【評分標準】

(1) 試圖考慮任取十行的組合方法數進行估計，$\frac{1}{7}$

(2) 完整給出證明，$\frac{7}{7}$

7. 將一個正方形切為若干個全等的矩形，這些矩形的邊長都是整數。一個矩形若與正方形由左上至右下的對角線至少有一個交點，則我們稱此矩形為「核心矩形」。請證明這條對角線平分這些「核心矩形」的總面積。（十四分）

【參考解法】

令這些全等的矩形為 $m\times n$ 或 $n\times m$。接著依以下方式標示上數字：

(i) 可將大正方形視為由單位小正方形所組成的，並在由左上至右下的主對角線所經過的單位小正方形上標示 0、在左上至右下的主對角線上方且與這條主對角線緊鄰且平行的 $m+n-1$ 條斜線所經過的單位正方形上標示 1、在左上至右下的主對角線下方且與這條主對角線緊鄰且平行的 $m+n-1$ 條斜線所經過的單位正方形上標示 -1。此時對於每一個核心矩形裡的單位小正方形都標示上了數字，且其數值之總和即為矩形在主對角線上方的面積減去矩形在主對角線下方的面積之值。

(ii) 而對於非核心矩形來說，至少會有一個單位小正方形沒有標示上數字，因此我們現在繼續依序以平行左上至右下的主對角線之斜線來標示數字下去。擺放一個 $m\times n$ 或 $n\times m$ 的矩形使得我們想要標示數字的單位小正方形為這一個矩形內唯一一個尚未標示數字的單位小正方形，接著便在此單位小正方形內標示上一個數字使得這一個矩形內所有的單位小正方形標示上的數字之總和為 0。因為在(i)中在同一條平行左上至右下的主對角線之斜線所標示上的數字都相同，故擺放一個 $m\times n$ 或 $n\times m$ 的矩形之方向是無關緊要的。

以下為在 12×12 中，m=2、n=3 的例子：

0	1	1	1	1	-5	7	-5	1	1	1	-5
-1	0	1	1	1	1	-5	7	-5	1	1	1
-1	-1	0	1	1	1	1	-5	7	-5	1	1
-1	-1	-1	0	1	1	1	1	-5	7	-5	1
-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	-5	7	-5
5	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	-5	7
-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	-5
5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1
-1	5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1
-1	-1	5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1	1
-1	-1	-1	5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1
5	-1	-1	-1	5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0

每一條平行左上至右下的主對角線之斜線上所標示的數字都恰為與其以該主對角線為對稱軸對稱的另一條斜線上所標示上的數字的相反數。故可知原始的大正方形裡所有的數字之總和為 0，且每一個非核心矩形裡所有的數字之總和也為 0，因此所有的核心矩形之數字之總和必為 0，此即表示左上至右下的主對角線平分這些「核心矩形」的總面積。

【評分標準】

做出全等的矩形為 $1\times n$ 的情況，$\frac{1}{7}$

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》