International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2010 秋季賽　高中組　初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有一台錢幣兌換機可將 M 國錢 S 元兌換成 L 國 1 元，亦可將 L 國 $\frac{1}{S}$ 元兌換成 M 國錢 1 元，其中 S 是正實數。兌換機吐出的金額採四捨五入至整數元。
   (a) 用此機器將若干 L 國錢兌換成 M 國錢，再將所換到的 M 國錢全部換回 L 國錢。請問經過一次上述兌換後，是否有可能最後所得的 L 國錢比原來的錢多？（二分）
   (b) 假設上述的答案為「可能」，將手中所有的錢幣不斷地全部一起反覆兌換。請問所得的錢是否有可能會不斷地增多？（三分）

【參考解法】

(a) 若 S=1，則明顯可知最後所得的 L 國錢無法比原來的錢多。

若 S>1，則用 L 國錢 n 元，則知最多等值於 M 國錢 $nS+a$ 元，其中 a 為實數且 $0\le a\le\frac{1}{2}$。若此時用 M 國錢 $nS+a$ 元兌換回 L 國錢，則匯率為 $\frac{nS+a}{S}=n+\frac{a}{S}$。因 S>1，故 $\frac{a}{S}<\frac{1}{2}$，即兌換機吐出的金額仍為 n 元，因此不會有任何比原來的錢多的可能。

故知賺錢的機會僅 S<1 時有可能。實際上若取 $S=\frac{1}{2}$，則 1 元 L 國錢可兌換得 $\frac{1}{2}$ 元 M 國錢，故此時兌換機吐出的金額為 1 元 M 國錢，再用這 1 元 M 國錢兌換即可得 2 元 L 國錢。故答案為可能

(b) 由(a) 的討論中可知此時 S<1，即 $\frac{1}{S}$>1，再由(a) 的討論中知 M 國錢在兌換時經過一來一往之後不會增加，亦即經過一次如(a)的兌換之後，不會再繼續賺錢了。故答案為不可能。

【評分標準】

(a) (1) 列出一個容易得解的式子，$\frac{5}{7}$

(2) 提出一個會讓錢變多的例子，$\frac{7}{7}$

(b) 證明不可能不斷地變多，$\frac{7}{7}$

註：(1)(2) 項不累加

2. 有一個凸四邊形 $ABCD$ 的兩條對角線互相垂直，且其相交於點 O。已知三角形 AOB、三角形 COD 的內切圓半徑之和等於三角形 BOC、三角形 DOA 的內切圓半徑之和。

(a) 請證明四邊形 $ABCD$ 有內切圓。(二分)

(b) 請證明四邊形 $ABCD$ 對稱於其中一條對角線。(三分)

【參考解法】

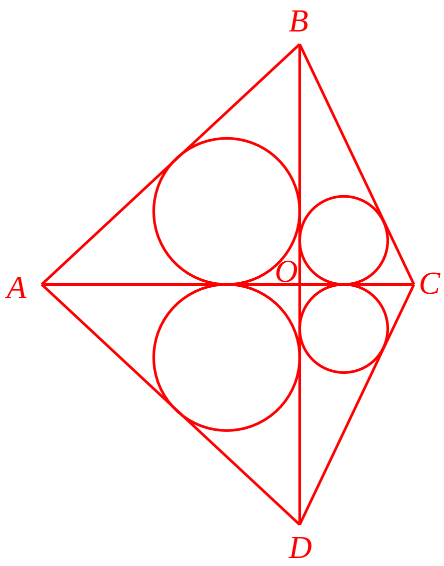
(a) 可知三角形 AOB、三角形 COD 的內切圓半徑之和為

$$\frac{1}{2}(OA+OB-AB)+\frac{1}{2}(OC+OD-CD)$$

而三角形 BOC、三角形 DOA 的內切圓半徑之和為

$$\frac{1}{2}(OB+OC-BC)+\frac{1}{2}(OD+OA-DA)$$

故知 $AB+CD=BC+DA$，此即為四邊形 $ABCD$ 有內切圓的充分必要條件。



(b) 可假設四邊形 $ABCD$ 中最長的邊為 DA。由畢氏定理可知：

$$AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=BC^2+DA^2$$

由 $AB+CD=BC+DA$ 知

$(AB+CD)^2=(BC+DA)^2$，故 $AB\times CD=BC\times DA$， 因此 $(AB-CD)^2=(DA-BC)^2$ 。

若 $AB-CD=DA-BC$ ，則 $AB=DA$ 且四邊形 $ABCD$ 對稱於 AC；

若 $CD-AB=DA-BC$ ，則 $CD=DA$ 且四邊形 $ABCD$ 對稱於 BD。

【評分標準】

(a) (1) 證明四邊形的對邊和相等，$\frac{5}{7}$

(2) 證明四邊形有內切圓，$\frac{2}{7}$

(b) 證明命題，$\frac{7}{7}$

3. 一座警察局位於兩端都可無限延伸僅有的一條直線公路上，一位小偷從警察局偷了一輛汽車。這輛汽車的最大速度等於巡邏警車最大速度的 90%。當大家發現車子被偷了，一位警察打算開巡邏警車去緝捕這位小偷，但他不知道小偷沿著公路朝哪個方向逃跑。請問警察是否保證能緝捕到小偷？請詳述您的理由。(註：此題純為數學問題，不考慮小偷何時偷車、油料多寡、人的壽命、....等各項因素)(五分)

【參考解法】

令巡邏警車的速度為 1，則警察可採取以下策略：警察隨意往一個方向追逐一段時間 q，接著立即往相反方向追逐一段時間 q^2，然後再立即往相反方向追逐一段時間 q^3 ，以此類推。

若再令警察追逐至時間q^n時的追逐方向為正向、相反方向為負向，則可知警察追逐至完成時間q^n後，共花費時間$q^n+q^{n-1}+\cdots+q=\dfrac{q^{n+1}-q}{q-1}$，此時移動距離為$q^n-q^{n-1}+\cdots+(-1)^n q=\dfrac{q^{n+1}-(-1)^n q}{q+1}$，故可以得知警察在此方向的平均速度為$\dfrac{q^{n+1}-(-1)^n q}{q+1}\div\dfrac{q^{n+1}-q}{q-1}>\dfrac{q-1}{q+1}$。若要追到小偷，其平均速度必須比小偷的速度快，亦即需要求$\dfrac{q-1}{q+1}>\dfrac{9}{10}$，故在$q>19$時，警察必可緝捕到小偷。

【評分標準】

(1) 考慮警察折返超過兩次，$\frac{1}{7}$

(2) 讓警察每一次折返所行走的距離為等比級數，$\frac{2}{7}$

(3) 得到一組可行的策略（如等比級數公比＞19），$\frac{4}{7}$

(4) 證明此策略的正確性，$\frac{2}{7}$

註：(2)(3) 項不累加

4. 將一塊大正方形木板以n－1條水平線與n－1條鉛垂線劃分為n^2個小矩形。將這些小矩形格子黑白相間塗色。若此大正方形的對角線恰好通過n個黑色的正方形。請證明所有黑色的小格子之總面積不小於所有白色小格子之總面積。（五分）

【參考解法】

令n－1條鉛垂線所切出的n塊鉛垂木條的寬度依序為a_1、a_2、…、a_n，而n－1條水平線所切出的n塊水平木條的寬度依序為b_1、b_2、…、b_n。可假設位於左下角的小格子為黑色正方形，並由對角線通過n個黑色正方形可知$a_i=b_i$，其中$1\le i\le n$。

此時若令黑色格子的面積為正、白色格子的面積為負，則可知長為a_i、寬為b_j的小格子之面積為$(-1)^{i+j}a_ib_j$，故大正方形木板的「總面積」之值為

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i\sum_{j=1}^{n}(-1)^j b_j=\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i\right)^2\ge 0$$

即所有黑色的小格子之總面積不小於所有白色小格子之總面積。

【評分標準】

(1) 畫出符合題意的圖形，並知道小格子可以不一樣大，$\frac{1}{7}$

(2) 證明該對角線不穿過任何白色矩形，$\frac{2}{7}$

(3) 列出黑色及白色格子面積，$\frac{2}{7}$

(4) 完成證明，$\frac{2}{7}$

5. 有一項競賽共有 55 位參賽者，每場比賽都由兩位選手配對進行淘汰賽，且一場賽完後才接著賽下一場，輸者立即被淘汰出局。每場比賽中，兩位配對的選手截至此場比賽前之勝局數量之差都不得超過 1 局。請問此競賽中的獲得冠軍之選手最多共可贏多少局？（五分）

【參考解法】

令 a_n 為產生贏得 n 局之贏家所有比過的比賽最少的總人數，即 $a_1=2$、$a_2=3$。而在決定贏得第 n 局之贏家時，其中一位參賽者必先贏得 $n-1$ 局、另一位參賽者贏得 $n-2$ 局，且不會有人同時與這兩位參賽者比賽過，故可知 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，此即斐波那契數列，故知 $a_3=5$、$a_4=8$、$a_5=13$、$a_6=21$、$a_7=34$ 而 $a_8=55$。因一共有 55 位參賽者，故知獲得冠軍之選手最多共可贏 8 局。

【評分標準】

(1) 宣稱最多可贏 8 局，$\frac{1}{7}$

(2) 試圖讓贏局數不同的人配對，$\frac{1}{7}$

(3) 成功構造出冠軍贏 8 局的賽況，$\frac{3}{7}$

(4) 觀察出贏 k 局需要 F_k 個人，其中 F_k 是費波那契數，$\frac{1}{7}$

(5) 證明出最多只可贏 8 局，$\frac{3}{7}$

註：(2)(3)項不累加、(4)(5)項不累加