International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2011 秋季賽　國中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在黑板上有一個大於 1 的整數 n。小李依照以下方法進行操作：找出黑板上的數之任意一個大於 1 的因數 d，然後擦去原來的數，並且在黑板寫上 $n+d$ 或 $n-d$ (必須是正整數)。對於任意的 n 值，請問小李是否可保證在有限次操作內使得黑板上出現正整數 2011？（三分）

【參考解法】

假設小李從任意一個正整數 n 開始操作起，每一次操作小李都是加上 n，經過 2010 次操作後便可得到 $2011n$，接下來每一次操作小李都減去 2011，經過 $n-1$ 次操作後即可得到 2011。

【評分標準】

- 黑板上現在若是一個奇數，則可以造出一個偶數
- 黑板上現在若有一個偶數，則可以造出任何奇數
- 4022 可變成 2011

以上三者做出：一項，$\frac{1}{7}$

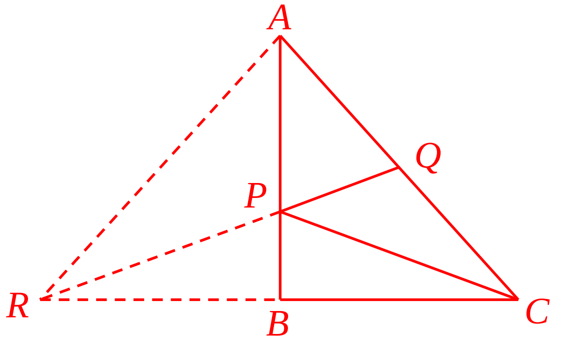
二項，$\frac{4}{7}$

三項，$\frac{7}{7}$

- 其餘可行作法，$\frac{7}{7}$

2. 在△ABC 中，點 Q 為 AC 邊的中點，點 P 為 AB 邊上之點且 $AP=2PB$。已知 $CP=2PQ$，請證明△ABC 為直角三角形。(四分)

【參考解法】



如圖，在 QP 延長線上取 R 點使得 $RP=2PQ$。連接 AR、RC，則可知 P 是△ARC 的重心。

因 $AP=2PB$，故知 B 即為 RC 邊上的中點；再因 $RP=2PQ=CP$，故可由 SSS 全等公理知△PRB≅△PCB，因此∠ABR=∠ABC。

現再由 B 在 RC 邊上可知

∠ABR+∠ABC=180°，故得∠ABR=∠ABC=90°，即△ABC 為直角三角形。

【評分標準】

- 如參考解法造出△ARC 並且得到 P 是△ARC 的重心，$\frac{2}{7}$
- 說明 B 即為 RC 邊上的中點，$\frac{1}{7}$
- 證明△PRB≅△PCB，$\frac{2}{7}$
- 說明∠ABR=∠ABC，$\frac{1}{7}$
- 說明∠ABR=∠ABC=90°，$\frac{1}{7}$

3. 有一座天平，它的一套砝碼之質量都兩兩互不相同。已知將任意兩枚砝碼放在天平的左秤盤上，一定可以從剩下的砝碼中選出一些砝碼放在右秤盤上，而使得天平平衡。請問這一套砝碼最少有多少枚？（五分）

【參考解法】

明顯可知只有 2、3、4 枚砝碼時不可能滿足條件，這是因為若把最重的二枚砝碼置於天平的左秤盤上時，便無法使天平平衡。現假設只有五枚砝碼且滿足條件，以及其重量由大到小依序為 a、b、c、d、e。故可知 $a+b=c+d+e$。因 $a+c>b+d$，故可得知 $a+c=b+d+e$，此時便可由這兩個等式得知 $b=c$，不合，故至少要有六枚砝碼。當六枚砝碼的重量為 8、7、6、5、4、3 時，由 8+7=6+5+4、8+6=7+4+3、8+5=7+6、8+4=7+5、8+3=7+4=6+5、7+3=6+4、6+3=5+4、5+3=8 及 4+3=7 知此六枚砝碼滿足條件。

【評分標準】

- 認為至少有 6 枚，$\frac{1}{7}$
- 給出 6 枚的構造(例如 3、4、5、6、7、8)，$\frac{4}{7}$
- 證明 5 枚不可，$\frac{2}{7}$

以上可累加。

4. 一個有 2012 列 k 行($k>2$)的棋盤，初始時在最左行上的某個小方格內已經放有一枚棋子，甲、乙兩位玩家輪流操作這枚棋子。每一次操作，玩家可以將這枚棋子向右、向上或向下移動一格到棋子不曾停留過的小方格上。當任何一位玩家將棋子移入最右行時則遊戲結束。本遊戲有兩種版本：版本 A，首先將棋子移入最右行者為贏家；版本 B，首先將棋子移入最右行者為輸家。兩位玩家事先都不知道輸贏規定是版本 A 或版本 B，直到有人將棋子移入從右邊算起第二行時才公布輸贏的版本。如果甲先操作，請問哪一位玩家有必勝的策略？（六分）

【參考解法】

先手的玩家有必勝策略。因為 2012 為偶數，當每一行的某個小方格內已經

放有一枚棋子時，此棋子將此行的格子分割為上、下方兩段，其中必定有一段格子數量為奇數個、另外一段格子數量為偶數個。初始時先手可以選擇往格子數量為奇數個的方向移動，因規定棋子只能向右、向上或向下移動一格到棋子不曾停留過的小方格上，故後手不能走回頭路，如此先手可迫使後手成為將棋子往右行移動的人，先手可以維持選擇往格子數量為奇數個的方向移動，直到棋子移動至從右邊算起第二行時為止。

若得知遊戲是採用版本 A 時，先手直接將棋子往右行移動而獲勝。

若得知遊戲是採用版本 B 時，先手可以選擇往格子數量為奇數個的方向移動。因此他可以保證迫使後手將棋子移入最右行而獲勝。

【評分標準】

- 若一方子走到倒數第二排，知道另一方應如何行動能必勝，$\frac{2}{7}$

5. 已知 $0<a, b, c, d<1$ 且 $abcd=(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$。請證明：

$$(a+b+c+d)-(a+c)(b+d)\geq 1$$ （六分）

【參考解法 1】

由 $abcd=(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ 可得：

$$\begin{aligned}
&a+b+c+d-(a+c)(b+d)\\
&=1+ac(1-b-d)+bd(1-a-c)\\
&=1+ac(1-b)(1-d)+bd(1-a)(1-c)-2abcd\\
&\geq 1+2\sqrt{ac(1-b)(1-d)bd(1-a)(1-c)}-2abcd\\
&=1+2abcd-2abcd\\
&=1
\end{aligned}$$

【參考解法 2】

由 $abcd=(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ 可得 $\dfrac{ac}{(1-a)(1-c)}=\dfrac{(1-b)(1-d)}{bd}$，故知

$$\frac{a+c-1}{(1-a)(1-c)}=\frac{ac}{(1-a)(1-c)}-1=\frac{(1-b)(1-d)}{bd}-1=\frac{1-b-d}{bd}。$$

再由 $\dfrac{a+c-1}{(1-a)(1-c)}=\dfrac{1-b-d}{bd}$ 可知 $\dfrac{(a+c-1)(1-b-d)}{(1-a)(1-c)bd}\geq 0$。

因 $(1-a)(1-c)bd>0$，故可得 $(a+c-1)(1-b-d)\geq 0$，此即

$$a-ab-ad+c-cb-cd-1+b+d\geq 0$$

$$(a+b+c+d)-(a+c)(b+d)\geq 1$$

【評分標準】

- 將欲證明之算式因式分解成 $(1-a-c)(1-b-d)\leq 0$，$\frac{2}{7}$
- 證明 $b+d$ 與 $a+c$ 一者大於 1、一者小於 1，$\frac{4}{7}$

● 比較 $b+d$ 與 $a+c$ 與 1 的大小關係，$\frac{1}{7}$

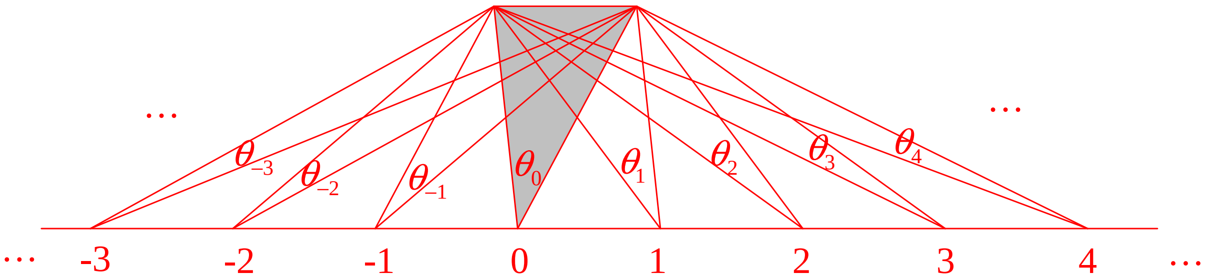
以上不可累加。

6. 有一輛汽車沿著一條筆直的公路以每小時 60 km 的勻速行駛。在公路一旁有一道長為 100 m 且與公路平行的圍籬，每一秒鐘駕駛都度量圍籬的視角一次。請證明這位駕駛所度量的角之總和小於 1100°。(七分)

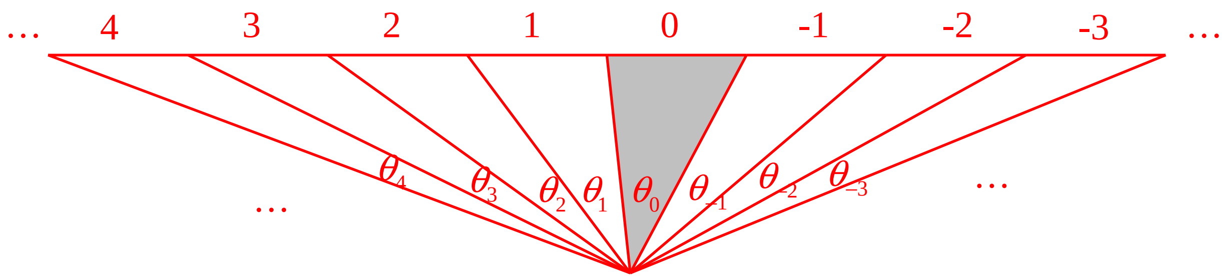
【參考解法】

汽車以每小時 60 km 的勻速行駛，即行駛 100 m 需要 6 秒，因此在圍籬間有六個或七個(如果圍籬的端點為度量視角點)度量視角點。

將駕駛所有度量視角點分成六組，使得每一組裡相鄰的點恰相距 100 m，因與圍籬長度相同，如果圍籬的端點為度量視角點，則圍籬的另一端點也在此同一組中。下圖即為其中一組的情況：



現平行移動所有的點至同一個點上，且每一個點所對應的視角與圍籬所形成的三角形也跟著移動；由平行四邊形的對邊相等可知，這些三角形移動後相鄰的邊會重合，並可得下圖：



由此可知同一組內所有的視角和至多為 180°。因一共有六組，故這位駕駛所度量的角之總和小於 6×180°=1080°。

【評分標準】

● 知道可把所有度量角度分為六組，每一組小於或等於 180°，$\frac{3}{7}$

7. 將一個正 45 邊形的頂點分別塗上紅色、黃色、綠色，每種顏色各塗 15 個頂點。請證明恆可以從每一種同顏色的頂點中，找出三個點構成一個三角形，使得這三種顏色所構成的三個三角形都互相全等。(九分)

【參考解法】

用一張透明的投影片剪出一個大小相同的正 45 邊形，並將剪出的正 45 邊形套在給定的正 45 邊形上，且將 15 個紅色頂點對應的位置稱之為紅位，接著每一次都以這個正 45 邊形的中心為中心，旋轉投影片上的正 45 邊形 8°。旋

轉 45 次，即旋轉一圈後，對這 45 個位置裡的每一個位置，都計算黃色頂點與 15 個紅位的重合次數。因這 15 個黃色頂點裡，每一個都會與紅位重合 15 次，因此總次數為 $15\times15=225$，因此每一次旋轉後，平均會有 $225\div45=5$ 個位置是黃色頂點與紅位重合。但當旋轉至紅色頂點與紅位重合時，黃色頂點與紅位重合的位置數為 0，因此至少會有一次旋轉後黃色頂點與紅位重合的位置數至少為 6。將這一次黃色頂點與紅位重合的位置稱之為黃位，可知黃位必同時為紅位。

接著任選 6 個黃位，重複以上旋轉的操作，但改計算綠色頂點與這 6 個黃位重合的次數。因重合的總次數為 $6\times15=90$，因此每一個旋轉後，平均會有 $90\div45=2$ 個位置是綠色頂點與黃位重合。同樣因旋轉至黃色頂點與黃位重合時，綠色頂點與黃位重合的位置數為 0，可得知會有一次旋轉後綠色頂點與黃位重合的位置數至少為 3 次。將這一次綠色頂點與黃位重合的位置稱之為綠位，可知綠位必同時為黃位及紅位。最後再任選 3 個綠位。此時從這三個位置對應的點可找出三個全等的三角形：旋轉至與紅色頂點重合時可得一個三個頂點都是紅色的三角形、旋轉至與黃色頂點重合時可得一個三個頂點都是黃色的三角形、旋轉至與綠色頂點重合時可得一個三個頂點都是綠色的三角形。

【評分標準】

- 將一種顏色的頂點旋轉，計算與其他顏色頂點重合的個數，$\frac{2}{7}$

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》