

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

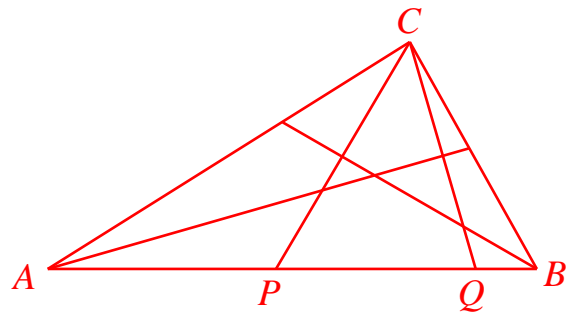
2011 秋季賽 國中組 初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 點 P 、 Q 在三角形 ABC 的最長邊 AB 上，已知 $AQ=AC$ 且 $BP=BC$ 。請證明三角形 CPQ 的外接圓圓心與三角形 ABC 的內心重合。(三分)

【參考解法】

由 $AQ=AC$ 可知三角形 AQC 是以 $\angle A$ 為頂角的等腰三角形，故知 $\angle A$ 的角平分線為 CQ 的中垂線，且再由 $BP=BC$ 可知三角形 BPC 是以 $\angle B$ 為頂角的等腰三角形，故也可推知 $\angle B$ 的角平分線為 CP 的中垂線。因三角形 ABC 的內心即為 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的角平分線交點，且三角形 CPQ 的外接圓圓心即為 CQ 與 CP 的中垂線交點，因此三角形 CPQ 的外接圓圓心與三角形 ABC 的內心重合。



【評分標準】

- 說明 $\angle A$ 的角平分線為 CQ 的中垂線， $\frac{3}{7}$
- 說明 $\angle B$ 的角平分線為 CP 的中垂線， $\frac{3}{7}$
- 說明結論， $\frac{1}{7}$

2. 若干位賓客圍坐在一圓桌前，桌上有一個裝有 2011 顆藍莓的盤子。依照順時針方向，每位賓客吃掉藍莓的總顆數正好都為下一位賓客的兩倍或比他少六顆。請證明這盤藍莓最後沒有被吃光。(四分)

【參考解法】

顯然不可能全部的賓客吃掉藍莓的總顆數都比下一位賓客少六顆，否則順時針方向轉一圈後，最後一位賓客不可能比第一位賓客吃的少。因此至少有一位賓客所吃的總顆數為下一位賓客的兩倍，即他吃了偶數顆藍莓。此時依逆時針方向逆推，因每位賓客吃掉藍莓的總顆數正好都為前一位賓客的兩倍或比他多六顆，故每位賓客都吃了偶數顆，但因 2011 為奇數，故不可能吃光。

【評分標準】

- (1a) 證若所有賓客都吃偶數個，一定吃不完， $\frac{0}{7}$
- (1b) 證若有一個賓客吃奇數個，則矛盾(不可能有任何賓客吃奇數個)， $\frac{7}{7}$

(2a) 證若所有賓客都吃奇數個，則矛盾， $\frac{3}{7}$

由(2a)，設賓客 X 吃了偶數個，則

(2b) 證 X 之後的人都吃偶數個

(2c) 證所有人都吃偶數個

(2d)=(1a) 證所有賓客都吃偶數個，一定吃不完， $\frac{0}{7}$

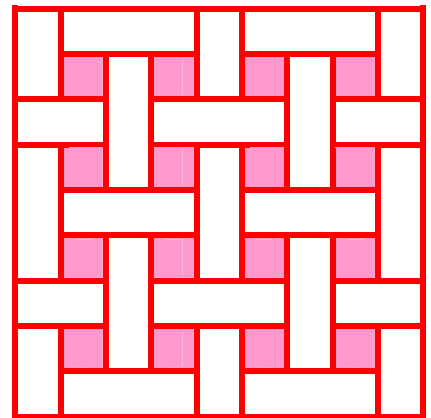
(3) 若第一個賓客吃偶數個，則一定吃不完， $\frac{2}{7}$

(1)、(2)、(3)不可累加。

3. 在一個 9×9 的棋盤中，將 16 個位於行數與列數都是偶數的小方格挖除。請將剩下的棋盤分割為許多的小矩形，使得這些小矩形中為單位正方形的數量愈少愈好。(四分)

【參考解法】

右圖即為棋盤依題意切割後，單位正方形的數量為 0 個的情形：



【評分標準】

- 宣稱答案為 0 個， $\frac{0}{7}$
- 構造不含單位正方形的分法， $\frac{7}{7}$

4. 在正三十三邊形的頂點上分別不重複地標記上一個 1 到 33 的數，然後在每條邊上標記它的兩個端點上的數之和。請問邊上所標記的數是否可能為三十三個連續的數？(四分)

【參考解法】

可以。將頂點依序標記上 17、1、18、2、19、3、...、15、32、16 及 33，則邊上的數依序即為 18、19、20、21、22、23、...、47、48、49 及 50。

【評分標準】

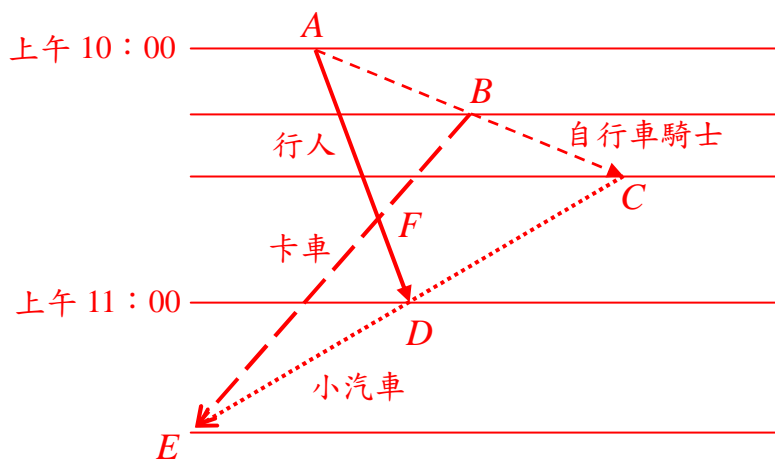
- 宣稱可以辦到， $\frac{0}{7}$
- 知道若可，邊應是 18~50， $\frac{1}{7}$
- 構造滿足題意的排法， $\frac{6}{7}$

5. 在一條公路上，一位行人與一位自行車騎士同向而行，另有一輛卡車與一輛小汽車從另一個方向駛近，大家都各自以不同的勻速行進。自行車騎士在上午 10 時追及行人。經過一段時間，自行車騎士與卡車相遇；又經過與上述相同的時間，自行車騎士與小汽車相遇。再經過另一段時間，小汽車與行人相

遇；又經過與此段相同的時間，小汽車追及卡車。已知行人與小汽車在上午 11 時相遇，請問行人在什麼時刻與卡車相遇？（五分）

【參考解法】

下圖中的縱軸為時間、橫軸為該公路。因所有的人與車都是以勻速前進，因此可將每一個人與車移動的路徑視為一直線。由題意可繪出下圖，其中 AD 即為行人的移動路徑、 AC 為自行車騎士的移動路徑、 BE 為卡車的移動路徑而 CE 為小汽車的移動路徑，其中箭頭所指方向即為其行進方向。由題意判斷出相同的時間區間，可得知 $AB=BC$ 與 $CD=DE$ ，故由此知 F 即為行人與卡車相遇的時間點；因 F 即為三角形 ACE 的重心，故知 $AF = \frac{2}{3}AD$ 。觀察縱軸相對位置，因 A 點位置為上午 10 時而 D 點位置為上午 11 時，故知 F 點位置為上午 10:40。



【評分標準】

- 知道答案為 10:40， $\frac{1}{7}$
- (1a) 將題目化為可解的幾何線段比問題， $\frac{3}{7}$
- (1b) 求出線段比， $\frac{3}{7}$
- (2a) 做出某人速度為 0 的特殊情形， $\frac{3}{7}$
- (2b) 說明任何情形都可以化約到某人速度為 0， $\frac{3}{7}$
- (3a) 設出速度、時間的變數並將問題化為方程組， $\frac{0}{7}$
- (3b) 解出方程組， $\frac{6}{7}$
- (1)、(2)、(3)為三種解法，不可累加。
- 做出 2 段時間相同時的特殊情形， $\frac{0}{7}$