International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2011 秋季賽　高中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 小皮在平面上至少標記了三個點，使得任兩點之間的距離都互不相同。若從點 B 出發到其它的點之距離最長的點是 A；從點 A 出發到其它的點之距離最短的點是 B，則稱點 A 與點 B 是一對「奇特的點對」。請問小皮最多可以得出幾對「奇特的點對」？（四分）

【參考解法】

我們將先舉例驗證當至少標記了三點時，則存在一對奇特的點對。任取兩點 A、B，則取出一點位於以 B 為圓心、AB 為半徑的圓內但不在以 A 為圓心、AB 為半徑的圓內，則點 B 是從點 A 出發距離最短的點且點 A 是從點 B 出發距離最長的點。接著我們將驗證若存在另一對奇特的點對，則會得到矛盾。考慮以下兩種情況：

情況 1：

若另一對奇特的點對為 C、D，其中點 C、D 皆與點 A、B 相異且點 D 是從點 C 出發距離最短的點、點 C 是從點 D 出發距離最長的點。而由點 B 是從點 A 出發距離最短的點可知 $DA>AB$，且由點 A 是從點 B 出發距離最長的點可知 $AB>BC$，以及點 D 是從點 C 出發距離最短的點可知 $BC>CD$，最後再由點 C 是從點 D 出發距離最長的點可知 $CD>DA$，因此 $DA>DA$，矛盾。

情況 2：

若另一對奇特的點對為 B、C，其中點 C 與點 A、B 皆相異且點 C 是從點 B 出發距離最短的點、點 B 是從點 C 出發距離最長的點。而由點 B 是從點 A 出發距離最短的點可知 $CA>AB$，且由點 A 是從點 B 出發距離最長的點可知 $AB>BC$，以及由點 B 是從點 C 出發距離最長的點可知 $BC>CA$，因此 $CA>CA$，矛盾。

故知小皮最多可以得出 1 對奇特的點對。

【評分標準】

(a)　宣稱最多一對，$\frac{1}{7}$

(b)　知道對一對奇特的點對而言，其他點必須落在一個新月形中，$\frac{1}{7}$

(c)　不可能有(a, b)、(c, d)都是奇特的，$\frac{3}{7}$

(d)　不可能有(a, b)、(b, c)及(a, b)、(c, a)都是奇特的，$\frac{2}{7}$

若得到(c)或(d)的分數，則自動得到(b)的分數。

2. 已知 $0<a, b, c, d<1$ 且 $abcd=(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$。請證明：

$$(a+b+c+d)-(a+c)(b+d)\geq 1$$

（四分）

【參考解法 1】

由 $abcd=(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ 可得：

$$\begin{aligned}&a+b+c+d-(a+c)(b+d)\\&=1+ac(1-b-d)+bd(1-a-c)\\&=1+ac(1-b)(1-d)+bd(1-a)(1-c)-2abcd\\&\ge 1+2\sqrt{ac(1-b)(1-d)bd(1-a)(1-c)}-2abcd\\&=1+2abcd-2abcd\\&=1\end{aligned}$$

【參考解法 2】

由 $abcd=(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ 可得 $\dfrac{ac}{(1-a)(1-c)}=\dfrac{(1-b)(1-d)}{bd}$，故知

$$\frac{a+c-1}{(1-a)(1-c)}=\frac{ac}{(1-a)(1-c)}-1=\frac{(1-b)(1-d)}{bd}-1=\frac{1-b-d}{bd}\text{。}$$

再由 $\dfrac{a+c-1}{(1-a)(1-c)}=\dfrac{1-b-d}{bd}$ 可知 $\dfrac{(a+c-1)(1-b-d)}{(1-a)(1-c)bd}\ge 0$。

因 $(1-a)(1-c)bd>0$，故可得 $(a+c-1)(1-b-d)\ge 0$，此即

$$a-ab-ad+c-cb-cd-1+b+d\ge 0$$

$$(a+b+c+d)-(a+c)(b+d)\ge 1$$

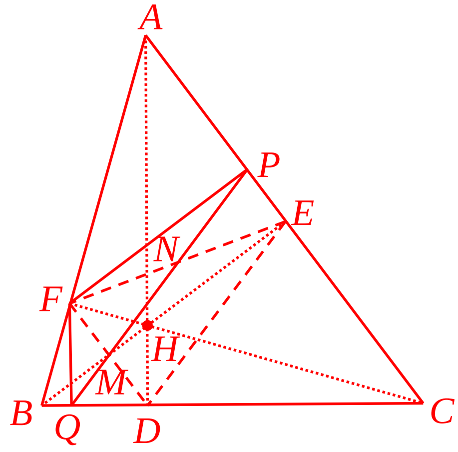
【評分標準】

- 將欲證明之算式因式分解成 $(1-a-c)(1-b-d)\le 0$，$\dfrac{2}{7}$
- 證明 $b+d$ 與 $a+c$ 一者大於 1、一者小於 1，$\dfrac{4}{7}$
- 比較 $b+d$ 與 $a+c$ 與 1 的大小關係，$\dfrac{1}{7}$

以上不可累加。

3. 在$\triangle ABC$ 中，點 D、E、F 分別為從點 A、B、C 引出之高的垂足。點 P、Q 為點 F 分別對 AC、BC 的投影。請證明直線 PQ 平分線段 DF 與 EF。（五分）

【參考解法】



令 H 為垂心、M 為 FD 與 PQ 的交點、N 為 PE 與 PQ 的交點，如圖所示。

由題意可知 $FP//BE$、$FQ//AD$，

故知 $\angle PFQ=\angle EHD$；

由 C、D、H、E 四點共圓可知 $\angle HED=\angle HCD$、

由 C、Q、F、P 四點共圓可知 $\angle FPQ=\angle FCQ$，

故 $\angle HED=\angle FPQ$，即可推得 $PQ//ED$。

由 C、D、H、E 四點共圓可知 $\angle EHC=\angle EDC$、

由 B、D、H、F 四點共圓可知 $\angle FHB=\angle FDB$，

故 $\angle FDB=\angle EDC$；

再因 $PQ//ED$，故知 $\angle FDB=\angle EDC=\angle PQD$，由此可推知 $QM=DM$。

現再因$\angle FQD=90^\circ$，故知$\angle DFQ=\angle FQM$，由此可推知 $QM=FM$，即 $FM=DM$，故知 M 為 DF 的中點，即 PQ 平分 DF。PQ 也必通過 FE 的中點。

【評分標準】

- 說明 $FP//BE$、$FQ//AD$，$\frac{1}{7}$
- 說明$\angle HED=\angle FPQ$，$\frac{2}{7}$
- 說明$\angle FDB=\angle EDC$，$\frac{2}{7}$
- 推知 $QM=DM$，$\frac{1}{7}$
- 說明 M 為 DF 的中點，$\frac{1}{7}$

4. 是否存在一個凸 n 邊形使得它的頂點都在拋物線 $y=x^2$ 上，且它的邊長都相等？

 (a) 當 n=2011 時；（三分）

 (b) 當 n=2012 時？（四分）

【參考解法】

(a) 存在一個凸 2011 邊形滿足題意。

可令 V 為此拋物線的頂點。在對稱軸的一側，可在拋物線上取 A_1、A_2、…、A_{1005} 使得$VA_1=A_1A_2=\cdots=A_{1004}A_{1005}=t$，且在對稱軸的另一側，可在拋物線上取 B_1、B_2、…、B_{1005} 使得$VB_1=B_1B_2=\cdots=B_{1004}B_{1005}=t$。令 $A_{1005}B_{1005}=l$，可知 l 值會隨著 t 值變化而改變。當 t 足夠小時，則知$l>t$；而當 t 足夠大時，則知 l 值會小於$\sqrt{t}$ 的常數倍，即小於 t。故知必存在一個 t 值使得$t=l$。

(b) 我們先證明以下的幾何引理：

[引理]

在凸四邊形 $ABCD$ 中，若 $AB=CD$ 且$\angle ABC+\angle BCD>180°$，則 $AD>BC$。

[證明]

作平行四邊形 $BCDE$，則知$\angle EBC+\angle BCD=180°<\angle ABC+\angle BCD$，

故$\angle EBC<\angle ABC$。

因已知 $BD=BD$ 且 $AB=CD=EB$，故由邊角邊不等式可知 $AD>ED+BC>BC$。

[推論]

若 A、B、C、D 為拋物線上的四個點且滿足 $AB=CD$，則 $AD>BC$。

[證明]

因這個拋物線為凸曲線，故 AB、CD 的延長線會交於一點 L，則知

$$\angle ABC+\angle BCD=(\angle ALD+\angle BCL)+(\angle ALD+\angle CBL)=\angle ALD+180°>180°,$$

故由引理知 $AD>BC$。

現回到原來的問題。令 P_1、P_2、…、P_{2012} 皆為拋物線上的點並且滿足$P_1P_2=P_2P_3=\cdots=P_{2011}P_{2012}$，則重複利用推論 1005 次後可以得知$P_1P_{2012}>P_2P_{2011}>\cdots>P_{1006}P_{1007}$，故知不存在一個凸 2012 邊形滿足題意。

【評分標準】

(a) 令 a_0 在(0, 0)處，作 a_1、a_2、…、a_{1005} 在第一象限，及 a_{-1}、a_{-2}、…、a_{-1005} 在第二象限，且 $\overline{a_i a_{i+1}}$ 等長。

- 存在 $\overline{a_0 a_1}$ 的長度使得 $\overline{a_{-1005}a_{1005}} < \overline{a_0 a_1}$，$\frac{2}{7}$
- 存在 $\overline{a_0 a_1}$ 的長度使得 $\overline{a_{-1005}a_{1005}} > \overline{a_0 a_1}$，$\frac{2}{7}$
- 由連續性知存在 $\overline{a_0 a_1}$ 的長度使得 $\overline{a_{-1005}a_{1005}} = \overline{a_0 a_1}$，$\frac{3}{7}$

(b)

- 說明若有一點在(0, 0)處會得到矛盾，$\frac{2}{7}$
- 說明若第一、二象限中的點數都是 1006 個會得到矛盾，$\frac{2}{7}$
- 說明若第一、二象限中的點數都不相同會得到矛盾，$\frac{2}{7}$
- 以上三點都得證，$\frac{1}{7}$

5. 若一個正整數的每位數碼都不為 0，則我們稱此數為一個好數。若一個好數的數碼由左至右嚴格遞增，則稱此數為一個「奇異數」。現給定一個好數，每次操作可以在此數的數碼之左側、右側或中間添入或移除一個至少有 k 位數的「奇異數」。請問能將任何一個好數經過有限次上述操作變成任意另一個好數的最大之 k 值是什麼？（七分）

【參考解法】

因 k=9 時，只有唯一的一個奇異數 123456789，故知無論如何添入或移除，都將無法改變這個數。因此現考慮 k=8。我們可以透過一次添入或移除一個數碼來轉換任何一個好數至另一個好數。如果可以利用以下所述之方式來添加數碼，則可利用此方式的逆操作來移除數碼：

(A)添加數碼 1 或 9 在原數的任何一個位置：

填入 123456789 後移除 23456789 或 12345678。

(B)添加數碼 2 在原數的任何一個位置：

填入 23456789 後利用(A)所述的方法在 2 與 3 間添加數碼 1，接著移除 13456789。

(C)添加數碼 8 在原數的任何一個位置：

填入 12345678 後利用(A)所述的方法在 7 與 8 間添加數碼 9，接著移除 12345679。

(D)添加數碼 3 在原數的任何一個位置：

填入 23456789 後利用(B)所述的方法移除 2，利用利用(A)、(B)所述的方法在 3 與 4 間添加數碼 1 和 2，接著移除 12456789。

(E)添加數碼 7 在原數的任何一個位置：

填入 12345678 後利用(C)所述的方法移除 8，利用(C)、(A)所述的方法在 6 與 7 間添加數碼 8 和 9，接著移除 12345689。

(F)添加數碼 4 在原數的任何一個位置：

填入 23456789 後利用(B)、(D)所述的方法移除 2 和 3，利用(A)、(B)、(D)所述

的方法在 4 與 5 間添加數碼 1、2 和 3，接著移除 12356789。

(G)添加數碼 6 在原數的任何一個位置：

填入 12345678 後利用(E)、(C)所述的方法移除 7 和 8，利用(E)、(C)、(A)所述的方法在 5 與 6 間添加數碼 7、8 和 9，接著移除 12345789。

(H)添加數碼 5 在原數的任何一個位置：

填入 23456789 後利用(B)、(D)、(F)所述的方法移除 2、3 和 4，利用(A)、(B)、(D)、(F)所述的方法在 5 與 6 間添加數碼 1、2、3 和 4，接著移除 12346789。或者也可填入 12345678 後利用(G)、(E)、(C)所述的方法移除 6、7 和 8，利用(G)、(E)、(C)、(A)所述的方法在 4 與 5 間添加數碼 6、7、8 和 9，接著移除 12346789。

【評分標準】

- 做出 k=4，$\frac{1}{7}$
- 做出 k=5，$\frac{2}{7}$
- 做出 k=6，$\frac{3}{7}$
- 做出 k=8，$\frac{7}{7}$

以上不可累加。

6. 對於所有 $n>1$，請證明 $1^1+3^3+5^5+\cdots+(2^n-3)^{2^n-3}+(2^n-1)^{2^n-1}$ 之值可以被 2^n 整除，但是不可以被 2^{n+1} 整除。（七分）

【參考解法】

我們將先證明二個引理：

[引理 1]

對於任何一個正奇數 k，皆有 $k^{2^n}\equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$。

[證明]

可知 $k^{2^n}-1=(k-1)(k+1)(k^2+1)(k^4+1)\cdots(k^{2n-1}+1)$，此為 n+1 個偶數的乘積；再因 $k+1$ 與 $k-1$ 中恰有一數必可被 4 所整除，故可得結論。

[引理 2]

對於任何一個正整數 $n\geq 2$，皆有 $(2^n+k)^k\equiv k^k(2^n+1) \pmod{2^{n+2}}$。

[證明]

若將 $(2^n+k)^k$ 展開，則知除了 $C_1^k k^{k-1}2^n$ 與 k^k 外，每一項都可被 2^{n+2} 所整除，故可得結論。

現令 S_n 為題目所述之和。對於任何一個正整數 $n\geq 2$，將對 n 利用數學歸納法來證明 S_n 之值可以被 2^n 整除，但是不可以被 2^{n+1} 整除。可知 $S_2=1^1+3^3=28$ 可被 2^2 整除，但是不可以被 2^3 整除。接著利用推論 1 與推論 2，可得

$$
\begin{aligned}
S_{n+1}-S_n &\equiv \sum_{i=1}^{2^{n-1}}(2^n+2i-1)^{2^n+2i-1} \\
&\equiv \sum_{i=1}^{2^{n-1}}(2^n+2i-1)^{2i-1} \pmod{2^{n+2}} \\
&\equiv \sum_{i=1}^{2^{n-1}}(2i-1)^{2i-1}(2^n+1) \pmod{2^{n+2}} \\
&= S_n(2^n+1)
\end{aligned}
$$

故有 $S_{n+1}=2S_n(2^{n-1}+1)$。由數學歸納法的假設可知，S_n 之值可以被 2^n 整除，但是不可以被 2^{n+1} 整除，故可推得 S_{n+1} 之值可以被 2^{n+1} 整除，但是不可以被 2^{n+2} 整除。

【評分標準】

- 知道並證明對任意奇數 r，有 $r^{2^{k-1}}\equiv 1 \pmod{2^k}$，$\frac{2}{7}$
- 知道並證明對任意奇數 r，有 $r^{2^{k-1}}\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$，$\frac{4}{7}$

以上二點不可累加。

- 證明

$$
\begin{aligned}
&(2^{k-1}+1)^{2^{k-1}+1}+\cdots+(2^{k-1}+(2^{k-1}-1))^{2^{k-1}+2^{k-1}-1} \\
&\equiv 1^{2^{k-1}+1}+3^{2^{k-1}+3}+\cdots+(2^{k-1}-1)^{2^{k-1}+2^{k-1}-1} \pmod{2^{k-1}}
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{7}$

- 證明

$$
\begin{aligned}
&1^1+3^3+\cdots+(2^{k-1}-1)^{2^{k-1}-1} \\
&\equiv (2^{k-1}+1)^{2^{k-1}+1}+(2^{k-1}+3)^{2^{k-1}+3}+\cdots+(2^{k-1}+(2^{k-1}-1))^{2^{k-1}+2^{k-1}-1} \pmod{2^{k-1}}
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{7}$

- 證明

$$
\begin{aligned}
&1^1+3^3+\cdots+(2^{k-1}-1)^{2^{k-1}-1} \\
&\equiv (2^{k-1}+1)^{2^{k-1}+1}+(2^{k-1}+3)^{2^{k-1}+3}+\cdots+(2^{k-1}+(2^{k-1}-1))^{2^{k-1}+2^{k-1}-1} \pmod{2^{k}}
\end{aligned}
$$

$\frac{2}{7}$

- 證明

$$
\begin{aligned}
&1^1+3^3+\cdots+(2^{k-1}-1)^{2^{k-1}-1} \\
&\equiv (2^{k-1}+1)^{2^{k-1}+1}+(2^{k-1}+3)^{2^{k-1}+3}+\cdots+(2^{k-1}+(2^{k-1}-1))^{2^{k-1}+2^{k-1}-1} \pmod{2^{k+1}}
\end{aligned}
$$

$\frac{3}{7}$

以上四點不可累加。

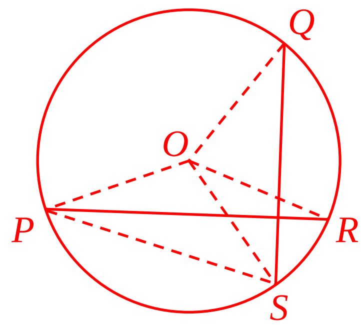
7. 在一個藍色的圓周上有 100 個紅點，這些紅點把圓周分割為 100 段弧，使得這 100 段弧之弧長恰好為 1、2、3、⋯、100 單位以某種順序排列。請證明必定存在兩條互相垂直的弦且它們的端點都是紅點。（九分）

【參考解法】

先證明以下的幾何引理：

[引理]

令 P、Q、R 與 S 為同一個圓上的四個點。若弧 PQ（由 P 順時針到 Q）與弧 RS（由 R 順時針到 S）可組成一個半圓，則 PR 與 QS 為互相垂直的兩弦。



[證明]

令 O 為圓心。則由已知的條件可得 $\angle POQ+\angle ROS=180°$。

故 $\angle PSQ+\angle RPS=\frac{1}{2}(\angle POQ+\angle ROS)=90°$，因此 PR 與 QS 為互相垂直的兩弦。

已知圓周的總長為 5050。我們只關注兩個端點都是紅點的弧。若一段弧的內部都沒有紅點，則稱之為單弧。至少包含兩個相鄰的單弧且其總長度小於或等於 2525 的弧，則稱之為合成弧。若有長度等於 2525 的合成弧，則取其兩個端點，再任取一紅點，此三點可形成一個直角三角形，故存在兩條互相垂直的弦。下面假設所有合成弧的長度都小於 2525，我們來證明長度不小於 2525－49=2476 的合成弧至少 50 條。

對於每一個紅點 P，找出以 P 為其中一個端點且長度最長的合成弧。若這條合成弧的長度小於 2476，則說明點 P 的對徑點（P 與圓心連線和圓的另一個交點）與其兩側相鄰的兩個紅點的距離均大於 2525－2476=49，即這兩個紅點之間的單弧長度至少為 50+50=100，因此點 P 必須為長度為 100 的單弧中點的對徑點，這樣的點最多有一個，即對剩餘的 99 個點，每個點都為一條長度不小於 2476 的合成弧的端點，因此至少可以選出 50 個這樣的弧，這是因為每一個最大弧都有二個端點。而每一個這樣的弧的長度至少為 2476 但少於 2525，共有 49 個可能值，由鴿籠原理可知至少有二個有相同的長度 $2525-k$，其中 $1\le k\le 49$。若其中一個弧 PQ 的端點不與長度為 k 的單弧 RS 的端點重複，則由引理可得 PR 與 QS 為互相垂直的兩弦。現假設這二個弧的端點都包含弧 PQ 的某個端點，則必然是其中一個以弧 PQ 為結束端點而另一個以弧 PQ 為開始端點（否則存在長度等於 2525 的合成弧）。此時從這二個弧中同時移除弧 PQ，則可得到二個沒有交集且長度都是 $2525-2k$ 的合成弧，且注意到 $2\le 2k\le 98$，因此可知一定有其中一個合成弧不包含長度為 $2k$ 的單弧，此時便可再利用相同的手法來驗證。

【評分標準】

- 知道有兩段弦長相加長度為 2525 即垂直，$\frac{0}{7}$
- 知道有兩段弦長相加或相減長度為 2525 即垂直，$\frac{1}{7}$