

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2011 秋季賽 高中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 小皮在平面上標記了至少三個點，使得任兩點之間的距離都互不相同。若從點 B 出發到其它的點之距離最長的點是 A ；從點 A 出發到其它的點之距離最短的點是 B ，則稱點 A 與點 B 是一對「奇特的點對」。請問小皮最多可以得出幾對「奇特的點對」？（四分）
2. 已知 $0 < a, b, c, d < 1$ 且 $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ 。請證明：
$$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1$$
（四分）
3. 在 $\triangle ABC$ 中，點 D, E, F 分別為從點 A, B, C 引出之高的垂足。點 P, Q 為點 F 分別對 AC, BC 的投影。請證明直線 PQ 平分線段 DF 與 EF 。（五分）
4. 是否存在一個凸 n 邊形使得它的頂點都在拋物線 $y = x^2$ 上，且它的邊長都相等？
 - (a) 當 $n=2011$ 時；（三分）
 - (b) 當 $n=2012$ 時？（四分）
5. 若一個正整數的每位數碼都不為 0，則我們稱此數為一個好數。若一個好數的數碼由左至右嚴格遞增，則稱此數為一個「奇異數」。現給定一個好數，每次操作可以在此數的數碼之左側、右側或中間添入或移除一個至少有 k 位數的「奇異數」。請問能將任何一個好數經過有限次上述操作變成任意另一個好數的最大之 k 值是什麼？（七分）
6. 對於所有 $n > 1$ ，請證明 $1^1 + 3^3 + 5^5 + \dots + (2^n - 3)^{2^n - 3} + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ 之值可以被 2^n 整除，但是不可以被 2^{n+1} 整除。（七分）
7. 在一個藍色的圓周上有 100 個紅點，這些紅點把圓周分割為 100 段弧，使得這 100 段弧之弧長恰好為 1、2、3、 \dots 、100 單位以某種順序排列。請證明必定存在兩條互相垂直的弦且它們的端點都是紅點。（九分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2011 秋季賽 高中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

8. 小皮在平面上標記了至少三個點，使得任兩點之間的距離都互不相同。若從點 B 出發到其它的點之距離最長的點是 A；從點 A 出發到其它的點之距離最短的點是 B，則稱點 A 與點 B 是一對「奇特的點對」。請問小皮最多可以得出幾對「奇特的點對」？（四分）
9. 已知 $0 < a, b, c, d < 1$ 且 $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ 。請證明：
$$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1 \quad (\text{四分})$$
10. 在 $\triangle ABC$ 中，點 D, E, F 分別為從點 A, B, C 引出之高的垂足。點 P, Q 為點 F 分別對 AC, BC 的投影。請證明直線 PQ 平分線段 DF 與 EF 。（五分）
11. 是否存在一個凸 n 邊形使得它的頂點都在拋物線 $y = x^2$ 上，且它的邊長都相等？
(a) 當 $n=2011$ 時；（三分）
(b) 當 $n=2012$ 時？（四分）
12. 若一個正整數的每位數碼都不為 0，則我們稱此數為一個好數。若一個好數的數碼由左至右嚴格遞增，則稱此數為一個「奇異數」。現給定一個好數，每次操作可以在此數的數碼之左側、右側或中間添入或移除一個至少有 k 位數的「奇異數」。請問能將任何一個好數經過有限次上述操作變成任意另一個好數的最大之 k 值是什麼？（七分）
13. 對於所有 $n > 1$ ，請證明 $1^1 + 3^3 + 5^5 + \dots + (2^n - 3)^{2^n - 3} + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ 之值可以被 2^n 整除，但是不可以被 2^{n+1} 整除。（七分）
14. 在一個藍色的圓周上有 100 個紅點，這些紅點把圓周分割為 100 段弧，使得這 100 段弧之弧長恰好為 1、2、3、 \dots 、100 單位以某種順序排列。請證明必定存在兩條互相垂直的弦且它們的端點都是紅點。（九分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》