International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2011 秋季賽　高中組　初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 若干位賓客圍坐在一圓桌前，桌上有一個裝有 2011 顆藍莓的盤子。依照順時針方向，每位賓客吃掉藍莓的總顆數正好都為下一位賓客的兩倍或比他少六顆。請證明這盤藍莓最後沒有被吃光。

【參考解法】

顯然不可能全部的賓客吃掉藍莓的總顆數都比下一位賓客少六顆，否則順時針方向轉一圈後，最後一位賓客不可能比第一位賓客吃的少。因此至少有一位賓客所吃的總顆數為下一位賓客的兩倍，即他吃了偶數顆藍莓。此時依逆時針方向逆推，因每位賓客吃掉藍莓的總顆數正好都為前一位賓客的兩倍或比他多六顆，故每位賓客都吃了偶數顆，但因 2011 為奇數，故不可能吃光。

【評分標準】

(1a)　證若所有賓客都吃偶數個，一定吃不完，$\frac{0}{7}$

(1b)　證若有一個賓客吃奇數個，則矛盾(不可能有任何賓客吃奇數個)，$\frac{7}{7}$

(2a)　證若所有賓客都吃奇數個，則矛盾，$\frac{3}{7}$

由(2a)，設賓客 X 吃了偶數個，則

(2b)　證 X 之後的人都吃偶數個

(2c)　證所有人都吃偶數個

(2d)=(1a)　證所有賓客都吃偶數個，一定吃不完，$\frac{0}{7}$

(3)　若第一個賓客吃偶數個，則一定吃不完，$\frac{2}{7}$

(1)、(2)、(3)不可累加。

2. 老王購買一張彩券，彩券上他可以任意填入一個 n 位數，但此 n 位數不可以有數碼 0。開獎時，彩券公司會揭示一張 $n\times n$ 的方格表，每個小方格內包含有一個從 1 到 9 的數碼，從方格表上的每行或每列，由左到右、由右到左、由上往下、由下往上共可讀出 $4n$ 個 n 位數。如果彩券上的 n 位數與這些 n 位數全都不吻合，則可獲得獎金。老王想要賄賂彩券公司的職員，請他們洩漏一些老王挑選的小方格內的數碼。請問老王至少要知道幾個小方格內的數碼，才能保證可以獲得獎金？

【參考解法】

最小值為 n。若老王最多只得知 $n-1$ 個數，則將會至少有一列上所有的數碼

是老王無法得知的，而他的彩券上的 n 位數有可能恰與這一列上的 n 位數相吻合因而無法獲得獎金。另一方面，若老王知道主對角線上所有的數碼，則能保證他的彩券可以獲獎。可令 d_1、d_2、d_3、…、d_n 為主對角線上的數碼，而老王選 t_1、t_2、t_3、…、t_n 為他買彩券上的 n 位數之數碼，其中對於任意的 k 滿足 $1 \le k \le n$ 來說，無論是 t_k 或 t_{n+1-k} 都不會與 d_k 或 d_{n+1-k} 吻合，則他的彩券上的 n 位數不會與第 k 行或第 k 列上的 $4n$ 個 n 位數相吻合。

【評分標準】

- 宣稱答案為 n 個，$\frac{1}{7}$
- 證明 $n-1$ 個以下不可能，$\frac{2}{7}$
- 說明可以用 n 個達成目的，$\frac{4}{7}$

3. 在一個凸四邊形 $ABCD$ 中，已知 AB=10、BC=14、CD=11、DA=5。請問此凸四邊形兩條對角線的交角是多少度？

【參考解法】

令 AC 與 BD 相交於 O 點。若兩條對角線沒有互相垂直，則由對稱性可假設 $\angle AOB = \angle COD < 90°$。可得

$$(OA^2 + OB^2) + (OC^2 + OD^2) > AB^2 + CD^2 = 221$$

且

$$(OD^2 + OA^2) + (OB^2 + OC^2) > DA^2 + BC^2 = 221$$

這是矛盾的。故知兩條對角線互相垂直，即其夾角為 $90°$。

【評分標準】

(a) 宣稱夾角是直角，$\frac{1}{7}$

(b) 在特殊情況下算出夾角是直角，$\frac{1}{7}$

(c) 證明夾角是直角，$\frac{6}{7}$

(b)只有在(c)為 0 分時才能得到。

4. 正整數 $a<b<c$ 使得 $b+a$ 是 $b-a$ 的整數倍且 $c+b$ 是 $c-b$ 的整數倍。已知 a 是一個 2011 位數、b 是一個 2012 位數，請問 c 是多少位數？

【參考解法】

因 $c>b$，故知 c 至少為 2012 位數。可令 $b+a=k(b-a)$，其中 k 為整數且 $k>1$。則由此可知 $a(k+1)=b(k-1)$，故 $\frac{b}{a}=\frac{k+1}{k-1}=1+\frac{2}{k-1}\le 3$，等式成立的充要條件為 k=2。同理，$\frac{c}{b}\le 3$，也因此可得 $\frac{c}{a}=\frac{c}{b}\times\frac{b}{a}\le 9$。故 $c<10a$。因 a 為 2011 位數，所以 c 最多為 2012 位數。此時即可得知 c 恰為 2012 位數。

【評分標準】

- 了解 a 與 c 的關係(如 $c=\frac{n+1}{n-1}\frac{m+1}{m-1}a$)，$\frac{2}{7}$
- 知道 $b\le 3a$ 、 $c\le 3b$ ，$\frac{2}{7}$
- 代入數字發現 $b\le 3a$ ，$\frac{1}{7}$
- 證明 $b\le 3a$ (有寫到 $\frac{n+1}{n-1}$ 遞減即可)，$\frac{3}{7}$

最後兩點不可累加。

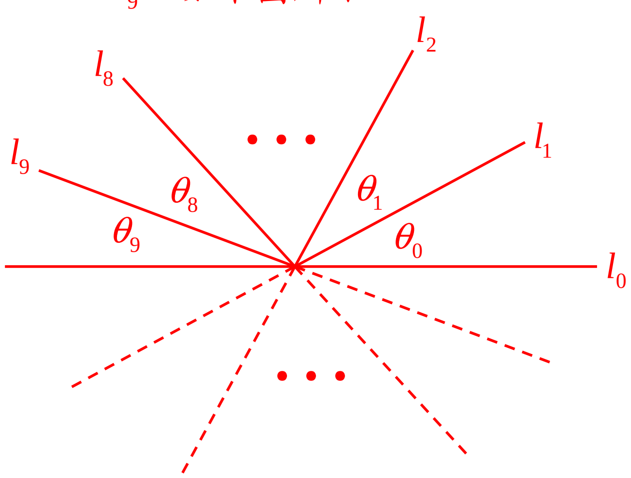
5. 在平面上畫十條直線，沒有任何兩條直線互相平行、也沒有任何三條直線相交於同一點。對於在每兩條直線的交點上，我們度量並記錄四個夾角中最小角的度量。請問所有 45 個紀錄度數總和的最大值是多少度？

【參考解法 1】

先考慮兩條畫出的直線。為了使這兩條直線之間所記錄的角最大，可知這兩條直線必須互相垂直。接著考慮其他的直線。若某條直線與第一條線所夾的最小角為 θ，則這條直線與第二條直線所夾的角為 $90°-\theta$ 。因此這條直線的位置對於前兩條直線是不相干的，也由此可推知第三條、第四條直線必須互相垂直才能使這兩條直線之間的夾角最大。同理可得其餘直線的位置與前四條直線是不相干的，再繼續推理下去，即可得知十條直線中會有五對互相垂直的直線。當這五對互相垂直的直線都沒有重合時，則所有它們所構成的 45 個角之總和的最大值為 40÷2×90°+5×90°=2250°，且這五對互相垂直的直線無論如何移動與其它直線之間的相對位置，都不會改變這個角度和最大的值。

【參考解法 2】

儘管題目是如此地敘述，但無論這些線是否相交於同一點，都不會影響答案。事實上，在接下來的推論中，假設這些線全部相交於同一點將更為方便。令這十條相交於同一點的直線為 l_0 、 l_1 、 l_2 、…、 l_9 ，相鄰兩條直線所構成的角為 θ_0 、 θ_1 、 θ_2 、…、 θ_9 ，如下圖所示。



現定義 $\phi(i, j)$ 為 l_i 與 l_j 所形成的最小角，則知

$$\begin{aligned}\phi(i,\ j) &= \min\{\theta_i+\theta_{i+1}+\cdots+\theta_{j-1}, 180°-(\theta_i+\theta_{i+1}+\cdots+\theta_{j-1})\} \\ &\le \theta_i+\theta_{i+1}+\cdots+\theta_{j-1}\end{aligned}$$

故可得

$$\phi(0,1)+\phi(1,2)+\cdots+\phi(9,0) \le \theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_9=180°$$

$$\begin{aligned}\phi(0,2)+\phi(1,3)+\cdots+\phi(9,1) &\le (\theta_0+\theta_1)+(\theta_1+\theta_2)+\cdots+(\theta_9+\theta_0) \\ &= 2(\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_9)=360°\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(0,3)+\phi(1,4)+\cdots+\phi(9,2) &\le (\theta_0+\theta_1+\theta_2)+(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+\cdots+(\theta_9+\theta_0+\theta_1) \\ &= 3(\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_9)=540°\end{aligned}$$

$$\phi(0,4)+\phi(1,5)+\cdots+\phi(9,3) \le 4(\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_9)=720°$$

$$\phi(0,5)+\phi(1,6)+\cdots+\phi(9,4) \le 5(\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_9)=900°$$

此時可發現$\phi(0,5)+\phi(1,6)+\phi(2,7)+\phi(3,8)+\phi(4,9)\le 450°$，故總和不會超過180°+360°+540°+720°+450°=2250°，而等式成立時為$\theta_0=\theta_1=\cdots=\theta_9=18°$，且仍有其他情形可使最大值2250°成立。

【評分標準】

- 知道答案是2250°，並舉出角度為2250°的例子，$\frac{1}{7}$
- 知道只要5組直角，就會得到2250°，$\frac{1}{7}$
- 考慮這十條直線的仰角(斜率)，$\frac{1}{7}$
- 任何情況都可調成新的情況，使角度和不變小，且新的情況中有一組直線是垂直，$\frac{2}{7}$
- 其餘的線不影響垂直的直線組的角度和，$\frac{2}{7}$
- 未證明便假設最大值存在，$\frac{2}{7}$

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》