

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽 2012 秋季賽 國中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有一個十進制的正整數，它只使用二個不同且互相交錯的數碼，這個數至少有十個數位以上。請問這個數最多可被 2 的多少冪次整除？（四分）
2. 小吉與小丁玩以下的遊戲。初始時，小吉將 222 顆珠子分為二堆放入兩個箱子內。小丁得知每一個箱子內珠子的數量後，他挑選一個 1 到 222 的整數 N 。接著，小吉從某一個箱子中取出 0 個或數個珠子放進第三個本來就是空的箱子，使得這三個箱子其中一個或二個箱子內珠子的總數量為 N 顆。小吉欲使第三個箱子內的珠子越少越好，小丁則希望越多越好。無論小吉如何操作，請問小丁保證最多可以得到多少顆珠子？（五分）
3. 在一個 11×11 的方格表的某些小方格內放入石子，每個小方格內至多放一顆石子。已知此方格表內的石子總顆數是偶數，且任意一個 2×2 的子方格表內的石子總顆數也是偶數。請證明在此方格表內最長的斜對角線上的小方格內的石子總顆數也是偶數。（六分）
4. 點 I 為 $\triangle ABC$ 的內心。令點 X 、 Y 、 Z 分別為 $\triangle BIC$ 、 $\triangle AIC$ 、 $\triangle AIB$ 之內心。若 $\triangle XYZ$ 的內心與點 I 重合。請問 $\triangle ABC$ 是否必定為正三角形？（七分）
5. 有一輛汽車沿著一個圓形跑道不斷地以順時針方向行駛。在中午時刻，小玉與小珍分別在跑道上兩個不同的地點開始記錄此汽車經過她們的時刻。過了一些時候，她們兩人同時結束記錄工作並比對兩人所記錄的結果。已知汽車至少各經過她們 30 次以上，在小玉的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次快 1 秒鐘；在小珍的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次慢 1 秒鐘。請證明她們記錄工作的時間不少於 1.5 小時。（八分）
6. 給定一個圓 O 及其內部一點 A ，點 A 不須與 O 重合。
 - (a) 通過點 A 畫兩條互相垂直的直線交此圓於四個點。請證明這四個點的質量中心與所選的兩條直線無關。（註：平面上座標為 (x_i, y_i) 的 n 個點的質量中心為 $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+y_3+\dots+y_n}{n})$ 。）（四分）
 - (b) 畫一個中心為點 A 的正 $2n$ 邊形。從 A 向此 $2n$ 邊形的各頂點畫射線交此圓於 $2n$ 個點，請證明這 $2n$ 個點的質量中心與所選的正 $2n$ 邊形無關。（四分）
7. 小明與小平玩以下的遊戲。首先，小明選定一個正整數 a ，然後讓小平猜。小平只知道小明選定的數之數碼和為 2012。每一次小平可以選一個正整數 x ，接著小明必須說出 $|x-a|$ 的數碼和。請問至少要經過多少次後小平才保證可以猜出小明所選的數？（十分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》