International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2012 秋季賽 國中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有一個十進制的正整數，它只使用二個不同且互相交錯的數碼，這個數至少有十個數位以上。請問這個數最多可被 2 的多少冪次整除？（四分）

【參考解法】

假設 N 有偶數個位數，則 N 可以表示成 $N = xyxy\cdots xy = 10101\cdots01\times xy$。因為 $10101\cdots01$ 是奇數，所以 N 能被幾個 2 整除取決於 xy 能被幾個 2 整除。最大的可能是 6，此時 $xy = 64 = 2^6$。假設 N 有奇數個位數，則 $N = yxyxy\cdots xy = y\times 10k + 10101\cdots01\times xy$，其中 k 為 N 的位數減一，故 $k\ge 9$，$y\times 10k$ 是 27 的倍數。而由偶數的情況知 $10101\cdots01\times xy$ 至多是 2^6 的倍數，所以 N 至多是 2^6 的倍數。

【評分標準】

- 指出正確答案是 6，$\dfrac{1}{7}$
- 完整做出偶數位數的情形，$\dfrac{2}{7}$
- 完整做出奇數位數的情形，$\dfrac{4}{7}$

2. 小吉與小丁玩以下的遊戲。初始時，小吉將 222 顆珠子分為二堆放入兩個箱子內。小丁得知每一個箱子內珠子的數量後，他挑選一個 1 到 222 的整數 N。接著，小吉從某一個箱子中取出 0 個或數個珠子放進第三個本來就是空的箱子，使得這三個箱子其中一個或二個箱子內珠子的總數量為 N 顆。小吉欲使第三個箱子內的珠子越少越好，小丁則希望越多越好。無論小吉如何操作，請問小丁保證最多可以得到多少顆珠子？（五分）

【參考解法】

上界：假如小吉將東西分成 74 個和 148 個兩堆，假設小丁所要求的數字為 $74k+r$，其中 k、r 為整數且 $-37\le 0<37$，則當 $r=0$ 時，x 恰為其中一堆或兩堆的和，當 $r<0$ 時，小吉可以從 $74k$ 那堆中移出 $-r$ 個，當 $r>0$ 時，小吉可以從不在 $74k$ 組成的那堆中拿出 r 個與 $74k$ 組成的那幾堆合併。故無論如何，小吉最多只需要移動 37 個東西即可滿足要求。

下界：假如小吉將東西分成 p 個和 q 個兩堆，$p\le q$。如果 $p\ge 74$，則小丁只需要求 37 個，小吉就至少要移動 37 個東西。如果 $p>74$，則小丁只需要求 111 個，小吉就至少要移動 37 個東西。

故無論如何，小丁總是有辦法得到 37 個東西。

【評分標準】

- 指出正確答案是 37，$\frac{1}{7}$
- 完整做出答案的上界為 37，$\frac{3}{7}$
- 完整做出答案的下界為 37，$\frac{3}{7}$

3. 在一個 11×11 的方格表的某些小方格內放入石子，每個小方格內至多放一顆石子。已知此方格表內的石子總顆數是偶數，且任意一個 2×2 的子方格表內的石子總顆數也是偶數。請證明在此方格表內最長的斜對角線上的小方格內的石子總顆數也是偶數。(六分)

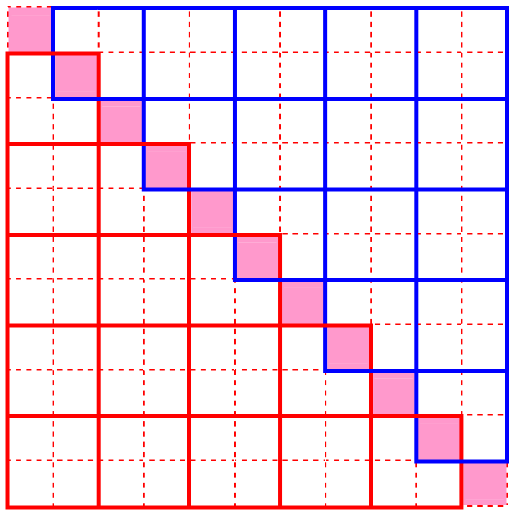
【參考解法】

考慮將下面 32 個值相加：

(i) 方格表內的石子數總和；

(ii) 如圖所示，分別由藍實線與紅實線所圍出的 30 個 2 × 2 子方格表內各自的石子數總和；

(iii) 最長的對角線上所有方格內的石子數總和 (圖中紅底方格)。



可以發現如此一來每個方格內的石子數都被算到偶數次，因此這 32 個值相加應當是個偶數。然題目已保證 (i) 與 (ii) 皆為偶數，因此 (iii) 也是偶數。

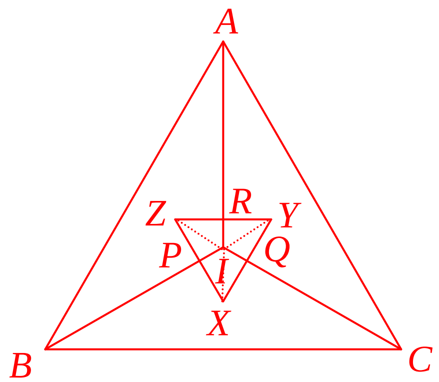
【評分標準】

- 完整證明，$\frac{7}{7}$

4. 點 I 為△ABC 的內心。令點 X、Y、Z 分別為△BIC、△AIC、△AIB 之內心。若△XYZ 的內心與點 I 重合。請問△ABC 是否必定為正三角形？(七分)

【參考解法】

令 BI 與 XZ 交於 P 、CI 與 XY 交於 Q、AI 與 YZ 交於 R。



因為 $\angle PZI = \angle RZI$、$IZ = IZ$、$\angle PIZ = \angle RIZ$，所以△$PIZ \cong$ △RIZ(ASA 全等)。

同理有△$PIX \cong$ △QIX、△$QIY \cong$ △RIY 。

又因 $$\begin{aligned}\angle IPZ &= \angle IRZ \\ &= 180° - \angle IRY \\ &= 180° - \angle IQY \\ &= \angle IQX \\ &= \angle IPX，\end{aligned}$$

因此 $\angle IPZ=\angle IPX=90°$，所以 BI 垂直 XZ。又由於 $\angle XBI=\dfrac{\angle ABC}{4}=\angle ZBI$，所以 P 為 XZ 的中點，從而 I 亦為中垂線交點，這表示 I 同時是 $\triangle XYZ$ 的內心與外心，因此可知 $\triangle XYZ$ 為正三角形。

最後，$\dfrac{1}{2}(90°+\dfrac{1}{2}\angle ABC)=\angle YIA=\angle ZIA=\dfrac{1}{2}(90°+\dfrac{1}{2}\angle ACB)$，所以 $\angle ABC=\angle ACB$，同理有 $\angle ACB=\angle BAC$，於是 $\triangle ABC$ 亦為正三角形。

【評分標準】

- 證出 $\triangle XYZ$ 為正三角形，$\dfrac{5}{7}$
- 已知 $\triangle XYZ$ 為正三角形而證出 $\triangle ABC$ 為正三角形，$\dfrac{2}{7}$

5. 有一輛汽車沿著一個圓形跑道不斷地以順時針方向行駛。在中午時刻，小玉與小珍分別在跑道上兩個不同的地點開始記錄此汽車經過她們的時刻。過了一些時候，她們兩人同時結束記錄工作並比對兩人所記錄的結果。已知汽車至少各經過她們 30 次以上，在小玉的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次快 1 秒鐘；在小珍的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次慢 1 秒鐘。請證明她們記錄工作的時間不少於 1.5 小時。（八分）

【參考解法】

可知兩個人至少都看到車子跑了 29 圈。對於小玉來說，設其看到車子跑一圈的時間依序分別為 $m+14$、$m+13$、…、$m-14$ 秒；對於小珍來說，設其看到車子跑一圈的時間依序分別為 $p-14$、$p-13$、…、$p+14$ 秒。則知兩人的紀錄上，車子總共跑完 29 圈的時間分別為 $29m$ 以及 $29p$。

因為小珍看到的前 15 圈覆蓋了小玉看到的第一圈到第十四圈或是第二圈到第十五圈，而在這兩種情況下，都可得

$$(p-14)+(p-13)+\cdots+p>(m+13)+(m+12)+\cdots+m\text{；}$$

同樣的，小玉看到的後 15 圈覆蓋了小珍看到的第十六圈到第二十九圈或是第十五圈到第二十八圈，而在這兩種情況下，都可得

$$(m-14)+(m-13)+\cdots+m>(p+13)+(p+12)+\cdots+p\text{。}$$

將此兩式相加，我們得到 $p+m>392$，故 $29p+29m>392\times29=11368$。故其中至少有一個人所觀測到的 29 圈時間超過 $\dfrac{11368}{2}=5684$ 秒，而 1.5 小時即為 5400 秒，故命題得證。

【評分標準】

- 完整作出，$\dfrac{7}{7}$

6. 給定一個圓 O 及其內部一點 A，點 A 不須與 O 重合。
   (a) 通過點 A 畫兩條互相垂直的直線交此圓於四個點。請證明這四個點的質量中心與所選的兩條直線無關。(註：平面上座標為 (x_i, y_i) 的 n 個點的質量

中心為$(\bar{x},\bar{y})=(\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n},\frac{y_1+y_2+y_3+...+y_n}{n})$。)（四分）

(b) 畫一個中心為點 A 的正 $2n$ 邊形。從 A 向此 $2n$ 邊形的各頂點畫射線交此圓於 $2n$ 個點，請證明這 $2n$ 個點的質量中心與所選的正 $2n$ 邊形無關。（四分）

【參考解法】

當點 O 和點 A 重合時，命題顯然。在其他情況時，我們想要證明這個質量中心永遠是線段 OA 的中點。

(a) 兩條垂直的線會與圓交出兩條弦，而一條弦兩端點的質量中心為其中點。假如有一條弦為直徑的話，則另外一條弦的中點為 A，故質量中心為 OA 的中點。不然的話，令兩條弦的中點分別為 B、C。顯然 OB 和 BA 垂直， OC 和 CA 垂直，而因為兩條弦也互相垂直，四邊形 $OABC$ 為一長方形，故 BC 的中點即為此長方形的中心，亦為 OA 的中點。

(b) 將這正 $2n$ 邊形內以點 A 為中點的對角線連接並延長至圓上的點，此形成 n 條在此圓上的弦。可知相鄰的 2 條弦之夾角為 $\frac{180°}{n}$，且可知這 $2n$ 個點的質量中心會和這 n 條弦的中點的質量中心一樣，而這 n 條弦的中點皆在一個以 OA 為直徑的圓上。因在同一圓上，不同的弧之圓心角相等可推得其弧長相同，故可以得到這 n 個中點會在以 OA 為直徑的圓上形成一個正 n 邊形，所以其質量中心即為 OA 的中點。

【評分標準】

(a) 完整做出，$\frac{7}{7}$

(b) 完整做出，$\frac{7}{7}$

7. 小明與小平玩以下的遊戲。首先，小明選定一個正整數 a，然後讓小平猜。小平只知道小明選定的數之數碼和為 2012。每一次小平可以選一個正整數 x，接著小明必須說出$|x-a|$的數碼和。請問至少要經過多少次後小平才保證可以猜出小明所選的數？（十分）

【參考解法】

記正整數 x 的數碼和為 $S(x)$。小平的策略如下：第一次小平選 $x=1$，如果 a 最末端有 k 個 0 則 $S(|x-a|)=S(a-1)=2011+9k$，則小平可以藉此知道 a 最末端第一個非零的數碼是第幾位 (但尚不知道該數碼為何)。令 $a_1=a-10^k$，則 a_1 的數碼和只剩下 2011，同樣地我們可以藉由 $S(a_1-1)$ 知道 a_1 最末端第一個非零的數碼在第幾位 (這時候 x 要取使得 $a-x=a_1-1$，也就是 $x=10^k+1$)，如此反覆地做下去得到 a_2、a_3、…，每次都會讓 a_i 的數字和減少 1，直到第 2012 步後 $S(a_{2012})=0$，此時便能決定 a。

舉例來說，假如小平已知 a 的數碼和為 4，而小明選的數為 1010200，則第一次小平猜 1，得到 $S(1010199)=21=3+9\times2$，因此小平知道 a 的十位數和

個位數皆為零；第二次小平猜 101，得到 $S(1010099)=20=2+9\times2$，仍是百位數；第三次小平猜 201 得到 $S(1009999)=37=1+9\times4$，因此非零位是第四位數；最後小平猜 10201 得到 $S(999999)=0+9\times6$，因此是第六位。至此結束，小平便能知道 $a=100+100+10000+1000000=1010200$。

現證明 2011 次不能保證能猜到。設想小明選的數字其數碼皆為 0 或 1，即 $a=10^{t_{2012}}+\cdots+10^{t_3}+10^{t_2}+10^{t_1}$，其中 $t_{2012}>\cdots>t_3>t_2>t_1$。最初小平不知道任何資訊，因此選的數字 x 有可能比 10^{t_1} 小，但這時小平得到的結果 $S(a-x)=2011+S(10^{t_1}-1)$ 與 t_2、t_3、…、t_{2012} 完全無關，因此在最差的情況下，小平可能會在第一次詢問後仍無法知道任何與 t_2、t_3、…、t_{2012} 有關的資訊。因此第二次詢問時小平仍然無法避免選的 x 有可能比 10^{t_2} 小，若不幸如此，那麼小平第二次詢問得到的結果便會與 t_3、t_4、…、t_{2012} 完全無關。如此反覆下去可知，當問完 2011 個問題後，最差的情況下小平完全無法知道 t_{2012} 的任何資訊，因此不可能猜出 a 為何。

【評分標準】

- 證明 2011 次不能保證猜到，$\frac{3}{7}$
- 給出 2012 次能夠猜到的演算法並證明之，$\frac{4}{7}$