International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2012 秋季賽　國中組　初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有五位學生的姓分別為 Clarkson、Donaldson、Jackson、Robinson、Stevenson，而他們的名字為 Clark、Donald、Jack、Robin、Steve (不一定依相同順序)。已知：

   (a)　Clark 比 Clarkson 大一歲；
   (b)　Donald 比 Donaldson 大二歲；
   (c)　Jack 比 Jackson 大三歲；
   (d)　Robin 比 Robinson 大四歲；

   請問 Steve 與 Stevenson 誰年紀比較大？大幾歲？（三分）

【參考解法】

由於 Clarkson、Donaldson、Jackson、Robinson、Stevenson 的歲數和應該要等於 Clark、Donald、Jack、Robin、Steve 的歲數和，因此可知 Stevenson 比 Steve 大 1+2+3+4=10 歲。

【評分標準】

- 猜測 Stevenson 比 Steve 大十歲，並且給予一個例子，$\frac{3}{7}$
- 證明 Stevenson 比 Steve 大十歲，$\frac{4}{7}$

2. 令 $C(n)$ 表示正整數 n 的質因數個數。(例如 $C(10)=2$、$C(11)=1$、$C(12)=2$。) 當 $a\neq b$ 時，請問滿足 $C(a+b)=C(a)+C(b)$ 的正整數對 (a, b) 為有限多對還是無限多對？（四分）

【參考解法】

無限多對。滿足題意的取法至少有以下二種：

1. 取 $a=2^k$、$b=2^{k+1}$，則 $a+b=3\times 2^k$，其中 k=1、2、…。可知 $C(a)=1$、$C(b)=1$、$C(a+b)=2$。
2. 注意到 $C(1)+C(5)=1<2=C(6)$，故對任意正整數 k 都有 $C(7^k)+C(5\times 7^k)=3=C(6\times 7^k)$，因此取 $(a, b)=(7^k, 5\times 7^k)$ 皆滿足題意。其中 7 可以換成任何非 2、3、5 的質數。

【評分標準】

- 給出無限多對 (a, b)，$\frac{7}{7}$

3. 在一個10×10方格表的踩地雷遊戲中，每個小方格內都可能藏有一枚地雷或沒有地雷。在每個沒有地雷的小方格內寫上與此小方格有公共邊或公共頂點的所有小方格內藏有地雷的總數。現若將所有的地雷移除，而在原沒有地雷的小方格內都放一枚地雷，然後在現在沒有地雷的小方格內寫上與此小方格有公共邊或公共頂點的所有小方格內藏有地雷的總數。請問有沒有可能使最後所有方格內所填的數之總和大於原來所有方格內所填的數之總和？（五分）

【參考解法】

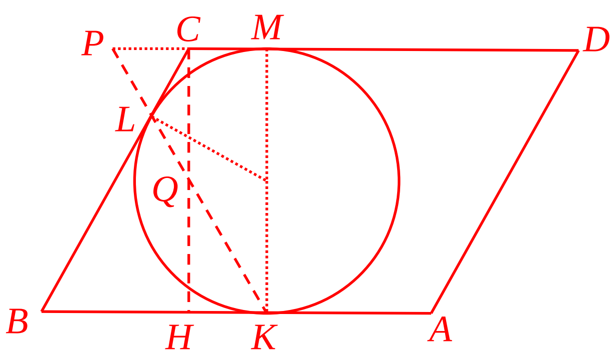
轉換前後的數之總和必定相同。如果兩個格子相鄰 (有公共邊或公共頂點)，並且其中一個有地雷，另一個卻無，我們就稱這一對格子為好格子對。容易發現方格內所填的數之總和就是好格子對的對數 (因為每一對好格子對都會在有地雷的那格被算到一次)；而好格子對在轉換過後仍然會是好格子對 (仍然相鄰，並且恰有一格有地雷)，反之亦然，因此轉換前後的好格子對數相同。綜合以上，便可得到轉換前後方格內所填的的數之總和皆等於好格子對數，是故必定相同。

【評分標準】

- 宣稱總和必定相同，$\frac{1}{7}$
- 證明總和必定相同，$\frac{6}{7}$

4. 一個圓與一個平行四邊形 $ABCD$ 的邊 AB、BC、CD 分別切於點 K、L、M。證明：直線 KL 平分由點 C 向平行四邊形 AB 邊上所作的高。（五分）

【參考解法】



如圖，令 KL 交 DC 於 P、CH 交 LK 於 Q。首先觀察到 $BK=BL$ 和 $CL=CM$。由 AA 相似知$\triangle CPL\sim\triangle BLK$，因此 $\triangle CPL$ 亦為等腰三角形，故 $CP=CL=CM$。又由於 $\triangle PCQ\sim\triangle PMK$，所以 $CQ：MK=PC：CM=1：2$，因此 $CQ=\frac{1}{2}MK=QH$，即 Q 為中點。

【評分標準】

- 完整證明，$\frac{7}{7}$

5. 有數項郊遊行程供全班 20 位學生參加，每項行程至少有一位學生參加。證明存在有一項行程使得參加此項行程的每位學生參加郊遊的項數至少為此班所有學生參加郊遊項數的$\frac{1}{20}$。（五分）

【參考解法】

令總共有 n 個行程。可稱那些參加少於$\frac{n}{20}$項行程的學生為紅學生，題目便是要證明存在一項行程，使得參加這項行程的學生都不是紅學生。但注意到每位紅學生僅能參加少於$\frac{n}{20}$項行程，並且最多只有 20 個紅學生，因此所有紅學生能參加的行程少於 $20\times\frac{n}{20}=n$ ，因此必定有一項行程中沒有紅學生。

【評分標準】

- 完整證明，$\frac{7}{7}$