

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽 2012 秋季賽 高中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 給一個無窮數列 a_1, a_2, a_3, \dots ，對於每一個正整數 k ，總是存在一個正整數 $t = t(k)$ 使得 $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \dots$ 。請問此數列是否必定為循環數列？(即是否存在一個正整數 T 使得對於任意正整數 k ，都會有 $a_k = a_{k+T}$) (四分)
2. 小吉與小丁玩以下的遊戲。初始時，小吉將 1001 顆珠子分為三堆放入三個箱子內。小丁知道每一個箱子內珠子的數量，他挑選一個 1 到 1001 的整數 N 。接著，小吉從某一個箱子中取出 0 個或數個珠子放進第四個本來就是空的箱子，使得這四個箱子其中一個、二個或三個箱子內珠子的總數量為 N 顆。小吉欲使第四個箱子內的珠子越少越好，小丁則希望越多越好。無論小吉如何操作，請問小丁保證最多可以得到多少顆珠子？(五分)
3. 有一輛汽車沿著一個圓形跑道不斷地以順時針方向行駛。在中午時刻，小玉與小珍分別在跑道上兩個不同的地點開始記錄此汽車經過她們的時刻。過了一些時候，她們兩人同時結束記錄工作並比對兩人所記錄的結果。已知汽車至少各經過她們 30 次以上，在小玉的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次快 1 秒鐘；在小珍的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次慢 1 秒鐘。請證明她們記錄工作的時間不少於 1.5 小時。(六分)
4. 點 I 為 $\triangle ABC$ 之內心，一個通過點 B 與點 I 的圓交 AB 於點 D 且交 BC 於點 E 。點 K 為 DE 之中點，請證明 $\angle AKC > 90^\circ$ 。(八分)
5. 小明與小平玩以下的遊戲。首先，小明選定一個正整數 a ，然後讓小平猜。小平只知道小明選定的數之數碼和為 2012。每一次小平可以選一個正整數 x ，接著小明必須說出 $|x-a|$ 的數碼和。請問至少要經過多少次小平才保證可以猜出小明所選的數？(八分)
6. 給定一個圓球 O 及其內部一點 A ，點 A 不須與 O 重合。
 - (a) 通過點 A 畫三條互相垂直的直線交此球於六個點。請證明這六個點的質量中心與所選的三條直線無關。(註：空間中座標為 (x_i, y_i, z_i) 的 n 個點的質量中心為 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+y_3+\dots+y_n}{n}, \frac{z_1+z_2+z_3+\dots+z_n}{n})$ 。)(五分)
 - (b) 畫一個中心為點 A 的正二十面體。從 A 向此正二十面體各頂點畫射線交此球於 12 個點。請證明這 12 個點的質量中心與所選的正二十面體無關。(一個正二十面體是由 20 個正三角形所構成的正多面體，每一個頂點皆為 5 條稜的交點)(五分)
7. 有 1000000 位士兵排成一長列，軍官將此列隊伍分割為人數不一定相同的 100 個的小段，接著此軍官將這些小段依照某種順序重新排成一長列，重排時在每一個小段內的士兵都不改變他在這一小段內的順序。軍官繼續重複以上的操作且每次操作所分割各小段的人數與順序都與第一次的操作相同；重新排成一長列時的順序也都與第一次的操作相同。現記錄下每一位原來位於第一小段內的士兵經過多少次操作後又重回到第一段中的次數，請證明這些操作的次數最多只能有 100 個相異的數。(十分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》