注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2012 秋季賽　高中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 給一個無窮數列 a_1、a_2、a_3、…，對於每一個正整數 k，總是存在一個正整數 $t=t(k)$ 使得 $a_k=a_{k+t}=a_{k+2t}=\cdots$。請問此數列是否必定為循環數列？(即是否存在一個正整數 T 使得對於任意正整數 k，都會有 $a_k=a_{k+T}$)（四分）

【參考解法】

答案是否定的。令正整數 k 的質因數分解中的 2 的冪次為 m_k。此數列為：

- 當 m_k 為奇數時，$a_k=0$；
- 當 m_k 為偶數時，$a_k=1$。

此時取 $t(k)=2m_k$，但是 a_k 不是循環數列 (反設存在循環節 T 的話，取 $k=2^{m_T}$ 便有 $a_k\neq a_{k+T}$)。

【評分標準】

- 否定命題並舉出反例，$\frac{7}{7}$

2. 小吉與小丁玩以下的遊戲。初始時，小吉將 1001 顆珠子分為三堆放入三個箱子內。小丁知道每一個箱子內珠子的數量，他挑選一個 1 到 1001 的整數 N。接著，小吉從某一個箱子中取出 0 個或數個珠子放進第四個本來就是空的箱子，使得這四個箱子其中一個、二個或三個箱子內珠子的總數量為 N 顆。小吉欲使第四個箱子內的珠子越少越好，小丁則希望越多越好。無論小吉如何操作，請問小丁保證最多可以得到多少顆珠子？（五分）

【參考解法】

在從 0 至 1001 的數線上標記上 A、B、C 三個點，分別對應三個箱子內的珠子數 a、b、c。接著再標上 $A+B$、$A+C$ 與 $B+C$ 三個點，分別對應從三個箱子中選取二個箱子內的珠子總數，將 0 標上 O 點，對應第四個空箱子，以及在 1001 上標記 $A+B+C$，對應前三個箱子內的 1001 顆珠子。當小丁選擇了整數 N，則小吉的策略為從這些標記的點中，找出最接近 N 的點，並從該點對應的箱子、二個箱子或三個箱子內的珠子裡選取部分珠子放到第四個箱子中而滿足條件。若這些標記的點為均勻分佈的，即相鄰兩點間的距離為 143，則知 N 與最接近 N 的標記的點之距離最大為 71，故小丁至多得到 71 個珠子。另一方面，因相鄰兩標記點間的距離至少為 143，故小丁一定可以找到一點 N 使得 N 與最接近 N 的標記的點之距離至少為 71，故小丁至少得到 71 個珠子。

【評分標準】

- 指出正確答案是 71，$\frac{1}{7}$
- 完整做出答案的上界為 71，$\frac{3}{7}$
- 完整做出答案的下界為 71，$\frac{3}{7}$

3. 有一輛汽車沿著一個圓形跑道不斷地以順時針方向行駛。在中午時刻，小玉與小珍分別在跑道上兩個不同的地點開始記錄此汽車經過她們的時刻。過了一些時候，她們兩人同時結束記錄工作並比對兩人所記錄的結果。已知汽車至少各經過她們 30 次以上，在小玉的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次快 1 秒鐘；在小珍的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次慢 1 秒鐘。請證明她們記錄工作的時間不少於 1.5 小時。（六分）

【參考解法】

可知兩個人至少都看到車子跑了 29 圈。對於小玉來說，設其看到車子跑一圈的時間依序分別為 $m+14$、$m+13$、…、$m-14$ 秒；對於小珍來說，設其看到車子跑一圈的時間依序分別為 $p-14$、$p-13$、…、$p+14$ 秒。則知兩人的紀錄上，車子總共跑完 29 圈的時間分別為 $29m$ 以及 $29p$。

因為小珍看到的前 15 圈覆蓋了小玉看到的第一圈到第十四圈或是第二圈到第十五圈，而在這兩種情況下，都可得

$$(p-14)+(p-13)+\cdots+p>(m+13)+(m+12)+\cdots+m\text{；}$$

同樣的，小玉看到的後 15 圈覆蓋了小珍看到的第十六圈到第二十九圈或是第十五圈到第二十八圈，而在這兩種情況下，都可得

$$(m-14)+(m-13)+\cdots+m>(p+13)+(p+12)+\cdots+p\text{。}$$

將此兩式相加，我們得到 $p+m>392$，故 $29p+29m>392\times 29=11368$。故其中至少有一個人所觀測到的 29 圈時間超過 $\frac{11368}{2}=5684$ 秒，而 1.5 小時即為 5400 秒，故命題得證。

【評分標準】

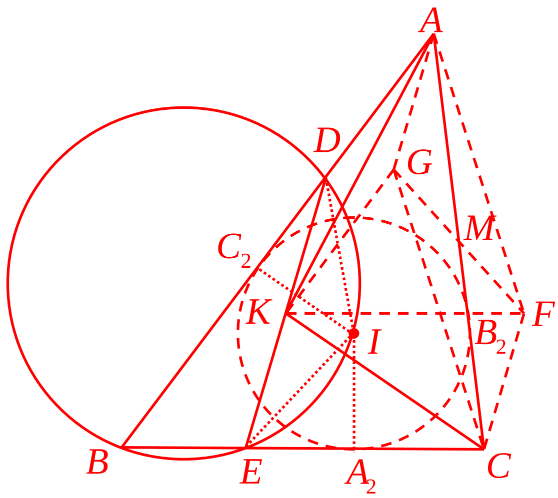
- 完整作出，$\frac{7}{7}$

4. 點 I 為$\triangle ABC$ 之內心，一個通過點 B 與點 I 的圓交 AB 於點 D 且交 BC 於點 E。點 K 為 DE 之中點，請證明 $\angle AKC>90^\circ$ 。（八分）

【參考解法】

作三角形 ABC 的內接圓，其對三邊 AB、BC、CA 的切點依序分別為 C_2、A_2、B_2。因為 A_2 是 I 對 BC 的垂足，C_2 是 I 對 AB 的垂足及 I、D、B、E 共圓，可知 $\angle DIE=180^\circ-\angle B=\angle C_2IA_2$，此時可進一步推得$\triangle IEA_2$ 全等於$\triangle IDC_2$，從而 $AD+CE=AC_2+CA_2=AB_2+CB_2=AC$。作平行四邊形 $KFCE$ 和 $KGAD$，則 $AFCG$ 也是平行四邊形。設 M 為 AC 中點，故 M 也是 $AFCG$ 中心及 FG 中點。在三角形 GKF 中，利用中點性質知 $2KM<KF+KG=AD+CE=AC$，所

以 K 在 AC 為直徑的圓內，因此可知 $\angle AKC$ 為鈍角。



【評分標準】

- 嘗試使用解析幾何但未解出，$\frac{0}{7}$
- 嘗試證明 K 在 AC 為直徑的圓內，$\frac{0}{7}$
- 完整作出，$\frac{7}{7}$

5. 小明與小平玩以下的遊戲。首先，小明選定一個正整數 a，然後讓小平猜。小平只知道小明選定的數之數碼和為 2012。每一次小平可以選一個正整數 x，接著小明必須說出 $|x-a|$ 的數碼和。請問至少要經過多少次小平才保證可以猜出小明所選的數？（八分）

【參考解法】

記正整數 x 的數碼和為 $S(x)$。小平的策略如下：第一次小平選 $x=1$，如果 a 最末端有 k 個 0 則 $S(|x-a|)=S(a-1)=2011+9k$，則小平可以藉此知道 a 最末端第一個非零的數碼是第幾位 (但尚不知道該數碼為何)。令 $a_1=a-10^k$，則 a_1 的數碼和只剩下 2011，同樣地我們可以藉由 $S(a_1-1)$ 知道 a_1 最末端第一個非零的數碼在第幾位 (這時候 x 要取使得 $a-x=a_1-1$，也就是 $x=10^k+1$)，如此反覆地做下去得到 a_2、a_3、…，每次都會讓 a_i 的數字和減少 1，直到第 2012 步後 $S(a_{2012})=0$，此時便能決定 a。

舉例來說，假如小平已知 a 的數碼和為 4，而小明選的數為 1010200，則第一次小平猜 1，得到 $S(1010199)=21=3+9\times 2$，因此小平知道 a 的十位數和個位數皆為零；第二次小平猜 101，得到 $S(1010099)=20=2+9\times 2$，仍是百位數；第三次小平猜 201 得到 $S(1009999)=37=1+9\times 4$，因此非零位是第四位數；最後小平猜 10201 得到 $S(999999)=0+9\times 6$，因此是第六位。至此結束，小平便能知道 $a = 100 + 100 + 10000 + 1000000 = 1010200$。

現證明 2011 次不能保證能猜到。設想小明選的數字其數碼皆為 0 或 1，即

$a=10^{t_{2012}}+\cdots+10^{t_3}+10^{t_2}+10^{t_1}$，其中$t_{2012}>\cdots>t_3>t_2>t_1$。最初小平不知道任何資訊，因此選的數字 x 有可能比10^{t_1}小，但這時小平得到的結果$S(a-x)=2011+S(10^{t_1}-1)$與$t_2$、$t_3$、…、$t_{2012}$完全無關，因此在最差的情況下，小平可能會在第一次詢問後仍無法知道任何與t_2、t_3、…、t_{2012}有關的資訊。因此第二次詢問時小平仍然無法避免選的 x 有可能比 10^{t_2} 小，若不幸如此，那麼小平第二次詢問得到的結果便會與 t_3、t_4、…、t_{2012} 完全無關。如此反覆下去可知，當問完 2011 個問題後，最差的情況下小平完全無法知道t_{2012}的任何資訊，因此不可能猜出 a 為何。

【評分標準】

- 證明 2011 次不能保證猜到，$\frac{3}{7}$
- 給出 2012 次能夠猜到的演算法並證明之，$\frac{4}{7}$

6. 給定一個圓球 O 及其內部一點 A，點 A 不須與 O 重合。
   (a) 通過點 A 畫三條互相垂直的直線交此球於六個點。請證明這六個點的質量中心與所選的三條直線無關。(註：空間中座標為(x_i, y_i, z_i)的 n 個點的質量中心為 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n},\frac{y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n}{n},\frac{z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n}{n})$。)（五分）
   (b) 畫一個中心為點 A 的正二十面體。從 A 向此正二十面體的各頂點畫射線交此球於 12 個點。請證明這 12 個點的質量中心與所選的正二十面體無關。(一個正二十面體是由 20 個正三角形所構成的正多面體，每一個頂點皆為 5 條稜的交點)（五分）

【參考解法】

令球心為 C，所得到的質量中心為 O，此質量中心也是所有由給定的直線和球交出的弦的中點的質量中心。

(a) 令交出的三條弦的中點為 K、L、M。此三點恰為 C 在這些直線上的投影點，因為此三條線為垂直的，故$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AM}$，故
$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AM})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 為固定點。

(b) 令 $\overrightarrow{AO}=\vec{a}$、$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$。我們希望證明$\vec{a}=\alpha\vec{c}$，其中$\alpha$和$\vec{c}$以及正二十面體的轉向無關。

這些交出的弦的中點恰為 C 在這二十面體的對角線上的投影。假設$\vec{e_i}$為第 i 條對角線方向的單位向量，且A_i為 C 在該條對角線上的投影點，則$\overrightarrow{AA_i}=(\vec{c}\cdot\vec{e_i})\vec{e_i}$，其中「·」表示內積，所以$6\vec{a}=(\vec{c}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}+\cdots+(\vec{c}\cdot\vec{e_6})\vec{e_6}$。

最後這個式子是和$\vec{c}$線性相關的，故我們只要證明

$$(\vec{c}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}+\cdots+(\vec{c}\cdot\vec{e_6})\vec{e_6}=6\alpha\vec{c} \qquad (1)$$

對於某三個不共平面的$\vec{c}$成立，則其就會對於任意$\vec{c}$成立。

當$\vec{c}=\vec{e_1}$時，因為 (1) 在把$\vec{e_i}$改變方向的時候，不會改變值，故我們可以

假設 $\overrightarrow{e_2}$、$\overrightarrow{e_3}$、…、$\overrightarrow{e_6}$ 指向的方向為和 $\overrightarrow{e_1}$ 夾角較小的那個方向，但此時根據對稱性，$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})=\cdots=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_6})=\beta_1$ 且 $\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}+\cdots+\overrightarrow{e_6}=\beta_2\overrightarrow{e_1}$，其中 β_1、β_2 為常數。故此時取 $\alpha=1+\beta_1\beta_2$ 即可滿足 (1)。根據對稱性，(1) 在 $\vec{c}=\overrightarrow{e_2}$、$\overrightarrow{e_3}$ 時亦成立。因為 $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$、$\overrightarrow{e_3}$ 為不共平面的三個向量，故 (1) 對於任意的 $\vec{c}$ 均成立，原題得證。

【評分標準】

(a) 完整做出，$\frac{7}{7}$

(b) 完整做出，$\frac{7}{7}$

7. 有 1000000 位士兵排成一長列，軍官將此列隊伍分割為人數不一定相同的 100 個的小段，接著此軍官將這些小段依照某種順序重新排成一長列，重排時在每一個小段內的士兵都不改變他在這一小段內的順序。軍官繼續重複以上的操作且每次操作所分割各小段的人數與順序都與第一次的操作相同；重新排成一長列時的順序也都與第一次的操作相同。現記錄下每一位原來位於第一小段內的士兵經過多少次操作後又重回到第一段中的次數，請證明這些操作的次數最多只能有 100 個相異的數。（十分）

【參考解法】

在 99 個中間界線位置上標記旗子，旗子在移動時不改變位置。我們定義一對士兵是特別的士兵如果他們本來是在第一段且位置相鄰，卻經過不同回合才首次回到第一段。顯然任何一對特別的士兵在移動過程中曾經出現在不同段中，考慮他們第一次進入不同段那回合，他們必然還是鄰居，所以他們兩人中間隔了一個旗子，稱為這對士兵分離的旗子。

接著證明每隊特別的士兵分離的旗子都不同。假設兩對特別的士兵 A、B 有相同的分離的旗子，A 在 k 回被此旗分開，B 在 $m(m>k)$ 回被此旗分開。因為移動的動作是可逆的，如果在回合 k 往回看 k 回，A 組的兩人都回到第一段，同樣的在回合 m 往回看 k 回，由於現在 B 就是剛剛的 A，故 B 組的兩人也都回到第一段，也就是說 B 只用了 $m-k$ 的回合就重回第一段，若過程中他們沒有分離，則 B 不是特別的，若他們有分離，分離時間一定比 m 還要早，兩種可能跟與假設矛盾。得證每對特別的士兵分離的旗子都不同。

因此特別的士兵不超過 99 對，根據定義知道第一段的士兵經過移動回到第一段的時間不超過 100 種。

【評分標準】

- 完整作出，$\frac{7}{7}$