

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2012 秋季賽 高中組 初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在一個 $m \times n$ 方格表的踩地雷遊戲中，每個小方格內都可能藏有一枚地雷或沒有地雷。在每個沒有地雷的小方格內寫上與此小方格有公共邊或公共頂點的所有小方格內藏有地雷的總數。現若將所有的地雷移除，而在原沒有地雷的小方格內都放一枚地雷，然後在現在沒有地雷的小方格內寫上與此小方格有公共邊或公共頂點的所有小方格內藏有地雷的總數。請問有沒有可能使最後所有方格內所填的數之總和大於原來所有方格內所填的數之總和？(四分)
2. 給定一個凸多面體、一個空心的圓球與此多面體的每條邊都相交於二點，且此二點都將該條邊三等分。請問此多面體的每個面是否必定為
 - (a) 互相全等的多邊形；(二分)
 - (b) 正多邊形？(三分)
3. 有數項郊遊行程供全班 20 位學生參加，每項行程至少有四位學生參加。證明存在有一項行程使得參加此項行程的每位學生參加郊遊的項數至少為此班所有學生參加郊遊項數的 $\frac{1}{17}$ 。(五分)
4. 令 $C(n)$ 表示正整數 n 的質因數個數。(例如 $C(10)=2$ 、 $C(11)=1$ 、 $C(12)=2$ 。)
 - (a) 當 $a \neq b$ 時，請問滿足 $C(a+b)=C(a)+C(b)$ 的正整數對 (a, b) 為有限多對還是無限多對？(二分)
 - (b) 如果還另外要求 $C(a+b) > 1000$ ，則滿足 $C(a+b)=C(a)+C(b)$ 的正整數對 (a, b) 為有限多對還是無限多對？(三分)
5. 在 239 枚外觀完全相同的硬幣之中有二枚重量相同的假幣，其他都是重量相同的真幣，假幣與真幣之重量不相同。請利用沒有刻度的兩臂天平稱三次，確定假幣比真幣重還是輕。並不要求找出這二枚假幣。(五分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》