International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2012 秋季賽　高中組　初級卷

1. 在一個 $m \times n$ 方格表的踩地雷遊戲中，每個小方格內都可能藏有一枚地雷或沒有地雷。在每個沒有地雷的小方格內寫上與此小方格有公共邊或公共頂點的所有小方格內藏有地雷的總數。現若將所有的地雷移除，而在原沒有地雷的小方格內都放一枚地雷，然後在現在沒有地雷的小方格內寫上與此小方格有公共邊或公共頂點的所有小方格內藏有地雷的總數。請問有沒有可能使最後所有方格內所填的數之總和大於原來所有方格內所填的數之總和？（四分）

【參考解法】

轉換前後的數之總和必定相同。如果兩個格子相鄰 (有公共邊或公共頂點)，並且其中一個有地雷，另一個卻無，我們就稱這一對格子為好格子對。容易發現方格內所填的數之總和就是好格子對的對數 (因為每一對好格子對都會在有地雷的那格被算到一次)；而好格子對在轉換過後仍然會是好格子對 (仍然相鄰，並且恰有一格有地雷)，反之亦然，因此轉換前後的好格子對數相同。綜合以上，便可得到轉換前後方格內所填的的數之總和皆等於好格子對數，是故必定相同。

【評分標準】

- 宣稱總和必定相同，1/7；
- 證明總和必定相同，6/7

2. 給定一個凸多面體、一個空心的圓球與此多面體的每條邊都相交於二點，且此二點都將該條邊三等分。請問此多面體的每個面是否必定為
   (a) 互相全等的多邊形；（二分）
   (b) 正多邊形？（三分）

【參考解法】

(a) 命題為錯。考慮一個底面是正三角形，側面是正方形的三角柱。標記每個邊的三等分點，對每個正方形來說這些三等分點是對稱的，故與三角柱中心距離都相等。而每個三等分點都屬於某個正方形的邊上，也就是說任意一個三等分點與中心的距離都相同。此三角柱滿足題目要求，但每個面並非都相同。

(b) 命題為真。考慮 $A_1A_2\cdots A_n$ 是多面體的其中一面， B_i 、C_i 是邊 $A_{i-1}A_i$ 的三等分點。假設 $A_{i-1}A_i=3a$ 、$A_iA_{i+1}=3b$，由圓冪定理知 $A_iB_i \times B_iC_i = A_iB_{i+1} \times A_iC_{i+1} \Leftrightarrow 2a^2=2b^2 \Leftrightarrow a=b$，所以這面每個邊都等長。最後只需證明每個內角都相等。設 O 為球心，則所有的三角形 OB_iC_i 都全等，由對稱性知道所有的 $\angle B_iOA_i$ 、所有的 $\angle B_iA_iO$ 、所有的 $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}=2\angle B_iA_iO$ 都相等，從而原題得證。

【評分標準】

(a) 否定命題並給出反例，7/7

(b) 給出證明，7/7；未給出完整證明，但嘗試使用圓冪定理，1/7 至 2/7

3. 有數項郊遊行程供全班 20 位學生參加，每項行程至少有四位學生參加。證明存在有一項行程使得參加此項行程的每位學生參加郊遊的項數至少為此班所有學生參加郊遊項數的$\frac{1}{17}$。（五分）

【參考解法】

令總共有 n 個行程。可稱那些參加少於$\frac{n}{17}$項行程的學生為紅學生，題目便是要證明存在一項行程，使得參加這項行程的學生都不是紅學生。但注意到每位紅學生僅能參加少於$\frac{n}{17}$項行程，如果紅學生個數不超過 17 個，所有紅學生能參加的行程便會小於 $17\times\frac{n}{17}=n$，因此必定有一項行程中沒有紅學生。但是，如果紅學生個數大於 17，令其為 k，因為每項行程至少四位學生參加，因此所有學生總共應當參加 $4\times n$ 次旅遊，而每一位紅學生頂多參加$\frac{n}{17}$次，且每一位非紅學生頂多參加 n 次，全部合計一共至多

$$k\times\frac{n}{17}+(20-k)\times n=(4-\frac{16}{17}(k-17))\times n<4\times n \text{ 次，}$$

矛盾。綜合以上，紅學生個數一定必超過 17 個，從而必定有一項行程中沒有紅學生。

【評分標準】

- 證明紅學生個數必定不超過 17 個，4/7
- 證明紅學生個數不超過 17 個時命題成立，3/7

4. 令 $C(n)$ 表示正整數 n 的質因數個數。(例如 $C(10)=2$、$C(11)=1$、$C(12)=2$。)
   (a) 當 $a\neq b$ 時，請問滿足 $C(a+b)=C(a)+C(b)$ 的正整數對(a, b)為有限多對還是無限多對？（二分）
   (b) 如果還另外要求 $C(a+b)>1000$，則滿足 $C(a+b)=C(a)+C(b)$ 的正整數對(a, b)為有限多對還是無限多對？（三分）

【參考解法】

(a) 無限多對。滿足題意的取法至少有以下二種：

1. 取 $a=2^k$ 、$b=2^{k+1}$，則 $a+b=3\times 2^k$，其中 k=1、2、…。可知 $C(a)=1$、$C(b)=1$、$C(a+b)=2$。
2. 注意到 $C(1)+C(5)=1<2=C(6)$，故對任意正整數 k 都有 $C(7^k)+C(5\times 7^k)=3=C(6\times 7^k)$，因此取 $(a, b)=(7^k, 5\times 7^k)$ 皆滿足題意。其中 7 可以換成任何非 2、3、5 的質數。

(b) 無限多對。令 p_1、p_2、…、p_k 為前 k 個質數，其中 $k>1000$，則可令 $p_1p_2\cdots p_k-1=P_1^{r_1}P_2^{r_2}\cdots P_s^{r_s}$，其中 $0<s<k$、P_i 為質數且滿足 $P_i\neq p_j$。再令 $m=k-s$ 且選擇質數 q_1、q_2、…、q_m 使得 $q_i\neq P_j$、$q_i\neq p_l$。現取 $a=q_1q_2\cdots q_m$、$b=q_1q_2\cdots q_mP_1^{r_1}P_2^{r_2}\cdots P_s^{r_s}$，則知 $a+b=q_1q_2\cdots q_mp_1p_2\cdots p_k$ 且可得 $C(a)=m$、

$C(b)=m+s$、$C(a+b)=m+k$。由 $m=k-s$ 可推得 $C(a+b)=C(a)+C(b)$。因質數有無限多個，故選取 q_1、q_2、…、q_m 的方式有無限多種選法，因此符合題目條件的正整數對 (a, b) 共有無限多對。

【評分標準】

(a) 給出無限多對 (a, b)，7/7

(b) 給出無限多對 (a, b)，7/7

5. 在 239 枚外觀完全相同的硬幣之中有二枚重量相同的假幣，其他都是重量相同的真幣，假幣與真幣之重量不相同。請利用沒有刻度的兩臂天平稱三次，確定假幣比真幣重還是輕。並不要求找出這二枚假幣。(五分)

【參考解法】

第一次分成 $X=80$、$Y=80$、$Z=79$ 三堆，將 X 與 Y 分別放上天秤做第一次測量，則有以下兩種情況：

(1) 天秤兩端平衡，表示兩堆中各有一假幣，或是此兩堆中皆無假幣。將 X 的 80 枚硬幣分為 40、40 兩堆放上天秤秤第二次。
   - (i) 若為平衡，表示 X 中的 80 枚必均為真幣(因為 X 頂多只有一假幣)，故假幣均在 Z 中。第三次從 X 中取 79 枚與 Z 分別放上天平測量即可知假幣輕重。
   - (ii) 若不平衡，表示其中一邊有一枚假幣，另一邊均為真幣，則將較重那邊的 40 枚分為 20、20 進行第三次的秤重。若為平衡，表示重的 40 枚中沒有假幣，因此可知假幣較輕；若不平衡，表示重的這 40 枚中有假幣，則可知假幣為重。

(2) 天秤兩端不平衡，不妨假設重量 $X>Y$，表示其中一堆有 2 枚假幣，另一堆均為真幣。將 X 分為 40、40 秤重，同樣有兩種情況：
   - (i) 天秤兩端不平衡，表示 X 中必有假幣，故 Y 必均為真幣，故可由第一次的測量結果直接得知假幣為重。
   - (ii) 天秤兩端平衡，表示 X 中沒有假幣，或者有兩枚假幣，分別在兩個 40 當中。因此可再從任意一邊的 40 枚分為 20、20 進行第三次的秤重，若為平衡，表示這 40 枚之中沒有假幣，從而 X 沒有假幣，則可由第一次測量結果知假幣較輕；若不平衡，表示這 40 枚中有假幣，從而 X 有兩個假幣，同理可知假幣較重。

綜合以上討論，可知用三次測量必可知道假幣輕重。

【評分標準】

- 第一次測量的分堆方式可行，並且完整討論不平衡的情況，4/7
- 第一次測量的分堆方式可行，並且完整討論平衡的情況，3/7