

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2013 秋季賽 國中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有紅色、黃色、綠色木棍各 100 根，任意取出 3 根互不相同顏色的木棍都可以構成一個三角形。請證明一定有某一種顏色的木棍可以從中任意取出 3 根而構成一個三角形。(五分)
2. 數學老師將十個連續正整數同時給小平與小白，小平與小白都將這十個連續正整數配成五對，然後計算每一對數的乘積，再求出這五個乘積的總和。請證明小平與小白的配對方式可能不同，但最後所得的總和卻相同。(五分)
3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 是直角。 $\angle C$ 的平分線交 AB 邊於點 M ，以 BC 邊為直徑在 $\triangle ABC$ 外部作半圓，若點 N 是此半圓弧之中點。請證明 AN 通過線段 CM 之中點。(六分)
4. 平面上有一張黑白相間塗色的 8×8 方格表，小丁任意選擇在其中一個小方格內部的一個點。每一回合，小王在此方格表內任意畫一個多邊形(可以是凹的，但不可以自交)，小丁接著會誠實告知小王所選的點在此多邊形的內部或外部。為保證能確定知道小丁所選的點在白色或黑色的小方格內，請問小王至少要進行多少回合？(七分)
5. 一個 101 邊形內接於一圓，從每一個頂點作它的對邊之垂線，其垂足可能在此邊上或其延長線上。請證明至少有一個垂足落在其對邊上。(九分)
6. 若 n 為正整數且 $3n+1$ 為質數，將數值 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ 表示為一個最簡分數，請證明此分數之分子為 $3n+1$ 的倍數。(十分)
7. 在桌上有 11 堆石子，每堆各 10 枚。小皮與小貝進行以下遊戲：他們輪流從中取石子，規定小皮每次只能從同一堆中取 1、2 或 3 枚石子，而小貝只能從 1、2 或 3 堆中各取一枚。小皮先拿，拿到最後一枚石子者勝。無論對手如何應對，請問誰有必勝的策略？(十二分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2013 秋季賽 國中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有紅色、黃色、綠色木棍各 100 根，任意取出 3 根互不相同顏色的木棍都可以構成一個三角形。請證明一定有某一種顏色的木棍可以從中任意取出 3 根而構成一個三角形。(五分)
2. 數學老師將十個連續正整數同時給小平與小白，小平與小白都將這十個連續正整數配成五對，然後計算每一對數的乘積，再求出這五個乘積的總和。請證明小平與小白的配對方式可能不同，但最後所得的總和卻相同。(五分)
3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 是直角。 $\angle C$ 的平分線交 AB 邊於點 M ，以 BC 邊為直徑在 $\triangle ABC$ 外部作半圓，若點 N 是此半圓弧之中點。請證明 AN 通過線段 CM 之中點。(六分)
4. 平面上有一張黑白相間塗色的 8×8 方格表，小丁任意選擇在其中一個小方格內部的一個點。每一回合，小王在此方格表內任意畫一個多邊形(可以是凹的，但不可以自交)，小丁接著會誠實告知小王所選的點在此多邊形的內部或外部。為保證能確定知道小丁所選的點在白色或黑色的小方格內，請問小王至少要進行多少回合？(七分)
5. 一個 101 邊形內接於一圓，從每一個頂點作它的對邊之垂線，其垂足可能在此邊上或其延長線上。請證明至少有一個垂足落在其對邊上。(九分)
6. 若 n 為正整數且 $3n+1$ 為質數，將數值 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ 表示為一個最簡分數，請證明此分數之分子為 $3n+1$ 的倍數。(十分)
7. 在桌上有 11 堆石子，每堆各 10 枚。小皮與小貝進行以下遊戲：他們輪流從中取石子，規定小皮每次只能從同一堆中取 1、2 或 3 枚石子，而小貝只能從 1、2 或 3 堆中各取一枚。小皮先拿，拿到最後一枚石子者勝。無論對手如何應對，請問誰有必勝的策略？(十二分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》