# International Mathematics Tournament of Towns
# 環球城市數學競賽
## 2013 秋季賽　國中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有紅色、黃色、綠色木棍各 100 根，任意取出 3 根互不相同顏色的木棍都可以構成一個三角形。請證明一定有某一種顏色的木棍可以從中任意取出 3 根而構成一個三角形。(五分)

【參考解法一】

不妨令全部的木棍中最短的一根為紅色且其長度為 $s$，又令在黃色與綠色的所有木棍中，最長的一根為綠色且其長度為 $l$。可知取這一根長度為 $s$ 的紅色木棍、這一根長度為 $l$ 的綠色木棍及任何一根黃色木棍都可構成一個三角形。此時若從黃色的木棍中任意取出長度分別為 $x$、$y$、$z$ 的三根木棍，其中 $x\le y\le z$，則可以得知 $x+y\ge s+y>l\ge z$，因此這三根黃色的木棍可構成一個三角形。

【參考解法二】

由紅色、黃色、綠色的木棍中，考慮最短的二根與最長的一根木棍，分別記其長度為 $(R_1, R_2, R)$、$(Y_1, Y_2, Y)$、$(G_1, G_2, G)$。假設不存在某一種顏色的木棍可以從中任意取出三根而構成一個三角形，則 $R_1+R_2<R$、$Y_1+Y_2<Y$、$G_1+G_2<G$。不失一般性，令 $R_1\leqq Y_1\leqq G_1$，則 $R_1+Y_1\leqq G_1+G_1\leqq G_1+G_2<G$，此與題設矛盾。

故一定有某一種顏色的木棍可以從中任意取出三根而構成一個三角形。

【評分標準】

完整證明，$\frac{7}{7}$；

未說明「若存在 3 根不能構成三角形，則可設此三根為最短的二根與最長的一根」，扣 $\frac{1}{7}$。

2. 數學老師將十個連續正整數同時給小平與小白，小平與小白都將這十個連續正整數配成五對，然後計算每一對數的乘積，再求出這五個乘積的總和。請證明小平與小白的配對方式可能不同，但最後所得的總和卻相同。(五分)

【參考解法一】

不妨令十個連續正整數為 $n$、$n+1$、$n+2$、…、$n+9$。若允許 $n=0$，則小平的配對方式可為 $(0,7)$、$(1,8)$、$(2,3)$、$(4,5)$、$(6,9)$，此時小平所得到的總和之值為 $0\times7+1\times8+2\times3+4\times5+6\times9=88$，而小白的配對方式若為 $(0,9)$、$(1,4)$、$(2,5)$、$(3,6)$、$(7,8)$，此時小白所得到的總和之值為 $0\times9+1\times4+2\times5+3\times6+7\times8=88$，即兩人最後得到的總和相同。一般而言，小平的配對方式為 $(n, n+7)$、$(n+1, n+8)$、$(n+2, n+3)$、$(n+4, n+5)$、$(n+6, n+9)$，此時小平所得到的總和之值為 $n(n+7)+(n+1)(n+8)+(n+2)(n+3)+(n+4)(n+5)+(n+6)(n+9)$，而小白的

配對方式若為$(n, n+9)$、$(n+1,n+4)$、$(n+2,n+5)$、$(n+3,n+6)$、$(n+7, n+8)$，則此時小白所得到的總和為$n(n+9)+(n+1)(n+4)+(n+2)(n+5)+(n+3)(n+6)+(n+7)(n+8)$。因 0+1+2+⋯+9=45，故這兩個代數式都等於$5n^2+45n+88$。

【參考解法二】

兩人配對方式不唯一，另一方式：小平的配對方式可為(0, 7)、(1, 6)、(2, 5)、(3, 4)、(8, 9)，而小白的配對方式為(0, 10)、(1, 2)、(3, 4)、(5, 6)、(7, 8)。證明方式同上。

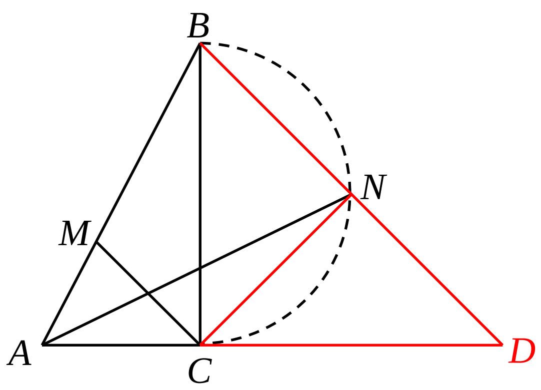
【評分標準】

證明任意情況皆可退化成 0～9 的情形，$\frac{5}{7}$；

做出 0～9 的情形，$\frac{2}{7}$。

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$是直角。$\angle C$的平分線交$AB$邊於點$M$，以$BC$邊為直徑在$\triangle ABC$外部作半圓，若點$N$是此半圓弧之中點。請證明$AN$通過線段$CM$之中點。(六分)

【參考解法】




延長$BN$交直線$AC$於點$D$，如圖所示。

$\triangle NBC$為等腰直角三角形，此時由$\angle BCA$是直角可得知$\triangle DBC$、$\triangle NDC$亦為等腰直角三角形，$\angle MCA=\angle BCD=45^\circ$，故可判斷出$DB$與$CM$平行。

因$N$為$DB$的中點，即$AN$平分$DB$，故可得知$AN$亦平分$CM$，即$AN$通過線段$CM$之中點。

【評分標準】

全對或全錯，無部分分數。

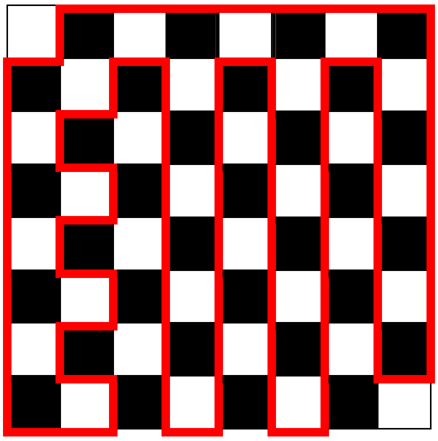
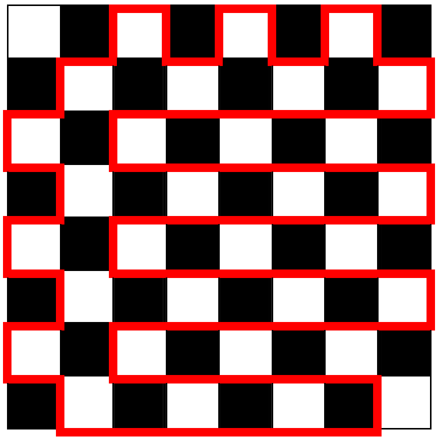
4. 平面上有一張黑白相間塗色的 8×8 方格表，小丁任意選擇在其中一個小方格內部的一個點。每一回合，小王在此方格表內任意畫一個多邊形(可以是凹的，但不可以自交)，小丁接著會誠實告知小王所選的點在此多邊形的內部或外部。為保證能確定知道小丁所選的點在白色或黑色的小方格內，請問小王至少要進行多少回合？（七分）

【參考解法】

若小王所畫的多邊形只包括某一種顏色的所有方格，則此多邊形必定自交，故小王只進行一回合不可能確定知道小丁所選的點在白色或黑色的小方格內。

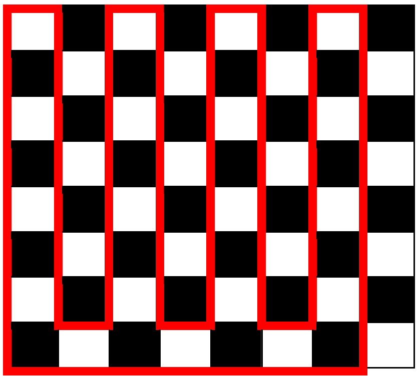
【多邊形畫法一】

如圖所示之多邊形畫法，可在二回合確定所選的點在白色或黑色的小方格內。若所選的點在白色方格內，則會同時在這兩個回合所畫出的多邊形的內部或同時在這兩個多邊形的外部；若所選的點在黑色方格內，則會在這兩個回合所畫出的多邊形其中一個的內部且在另一個多邊形的外部。

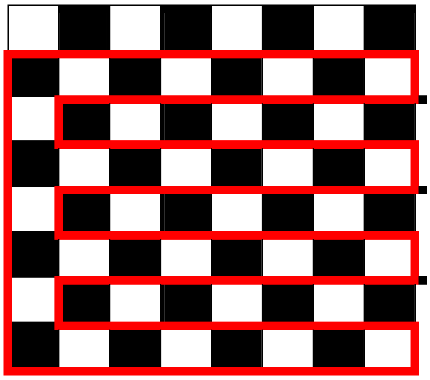



【多邊形畫法二】

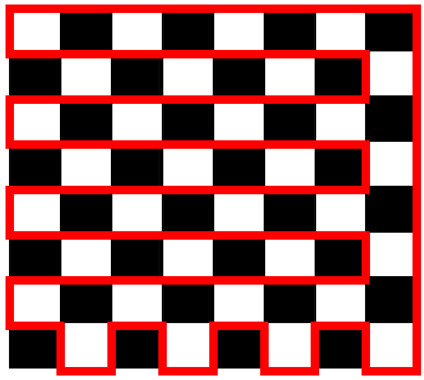
如圖所示之多邊形畫法，可在二回合確定所選的點在白色或黑色的小方格內。



多邊形 1



多邊形 2a



多邊形 2b

第一回合先畫多邊形 1。若所選的點落在多邊形 1 的外部，則該點一定落在由左至右第 2、4、6、8 行上，接著第二回合畫多邊形 2a，透過落在多邊形 2a 的內部或外部便可判斷出 所選的點在白色或黑色的小方格內；若所選的點落在多邊形 1 的內部，則該點一定落在由左至右第 1、3、5、7 行上或由下至上第 1 列上，接著畫多邊形 2b，可知多邊形 2b 包含由下至上的第 2、4、6、8 列及第 1 列內所有的白色小方格。因此若落在多邊形 2b 的內部，則所選的點在白色的小方格內；若落在多邊形 2b 的外部，則所選的點在白色的小方格內。

【評分標準】

全對或全錯，無部分分數。

5. 一個 101 邊形內接於一圓，從每一個頂點作它的對邊之垂線，其垂足可能在此邊上或其延長線上。請證明至少有一個垂足落在其對邊上。(九分)

【參考解法一】

令這一個 101 邊形為 $A_1A_2\cdots A_{101}$，其中頂點是以順時鐘方向依序數下去。接著考慮 $A_iA_{i+50}$ 這 101 條弦，其中 $1\le i\le 101$ 且 $A_{101+k}$ 即為 $A_k$。若從 $A_i$ 以順時鐘方向到 $A_{i+50}$ 的弧不短於半圓，則將弦 $A_iA_{i+50}$ 稱為「長弦」，其餘的情況則將弦 $A_iA_{i+50}$ 稱為「短弦」。若至少有 51 條長弦，考慮 51 條長弦的 102 個端點，由鴿籠原理可知至少有一點是兩條長弦的端點，不妨令這兩條長弦是 $A_1A_{51}$ 、 $A_{51}A_{101}$ ，其對應的弧都不短於半圓且沒有重合，即這兩條弧合起來必至少為一完整的圓，矛盾。故知至少有 51 條短弦，同樣由鴿籠原理可知 51 條短弦的 102 個端點中至少有一點是兩條短弦的端點，不妨令這兩條短弦是 $A_1A_{51}$、$A_{51}A_{101}$，因此$\angle A_{51}A_1A_{101}$、$\angle A_{51}A_{101}A_1$

是銳角，因此從 $A_{51}$ 往 $A_{101}A_1$ 作垂線所得的垂足落在 $A_{101}A_1$ 上而不在其延長線上。

【參考解法二】

考慮共圓的多邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$。將由這個多邊形的一條邊及其對角上的頂點所構成的三角形稱為主三角形，例如三角形 $A_1A_2A_{n+1}$ 即為一例。

引理：若圓心 $O$ 落在多邊形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 內，則點 $O$ 必落在某一個主三角形的內部或邊界上。

<u>證明</u>：考慮任一個主三角形 $ABM$，其中點 $B$ 是以逆時鐘方向上頂點 A 的下一個頂點。假設點 $O$ 落在以弦 $BM$ 及弧 $BM$ 所構成的部分圓內(此區域不包含點 $A$)，則以逆時針方向觀察下一個主三角形 $BCN$，其中點 $C$ 是以逆時鐘方向上頂點 B 的下一個頂點、點 N 是以逆時鐘方向上頂點 $M$ 的下一個頂點。若點 $O$ 沒有落在這一個主三角形內，則必落在以弦 $BM$、$CN$ 及弧 $CM$ 所構成的部分圓內。繼續重複此步驟下去，這樣點 $O$ 一定會落在某一個主三角形的內部或邊界。

現可驗證本題。若假設從每一個頂點作它的對邊之垂線，其垂足都落在此邊的延長線上，則此即等價於任一個主三角形的底角中有一個是鈍角。

(a) 若圓心 $O$ 落在這一個多邊形內，則由引理可得知點 $O$ 必落在某一個主三角形的內部或邊界上。則因圓 $O$ 是這一個主三角形的外接圓，故這一個三角形必是銳角三角形或直角三角形，矛盾；

(b) 若圓心 $O$ 落在這一個多邊形外，則考慮最長的邊 $XY$。可判斷出以 $XY$ 為一邊的主三角形內，$XY$ 的對角必是鈍角，即此主三角形有兩個鈍角，矛盾。

故知假設錯誤，即至少有一個垂足落在其對邊上。

【評分標準】

全對或全錯，無部分分數。

6. 若 $n$ 為正整數且 $3n+1$ 為質數，將數值 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ 表示為一個最簡分數，請證明此分數之分子為 $3n+1$ 的倍數。(十分)

【參考解法】

因 $3n+1$ 為質數，故知 $n$ 必為偶數，所以從 $n+1$ 到 $2n$ 共有偶數個整數。而

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\frac{3}{2}n}+\frac{1}{\frac{3}{2}n+1}\right)$$

$$=(3n+1)\left(\frac{1}{2n(n+1)}+\frac{1}{(2n-1)(n+2)}+\cdots\frac{1}{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n+1)}\right)$$

若繼續化簡成一個分式，可知分母必為 1、2、⋯、$2n$ 的最小公倍數，且因每一個數都小於質數$3n+1$，因此繼續化簡為最簡分式時，$3n+1$無法約分。所以最後表示為一個最簡分數，此分數之分子為$3n+1$的倍數。

【評分標準】

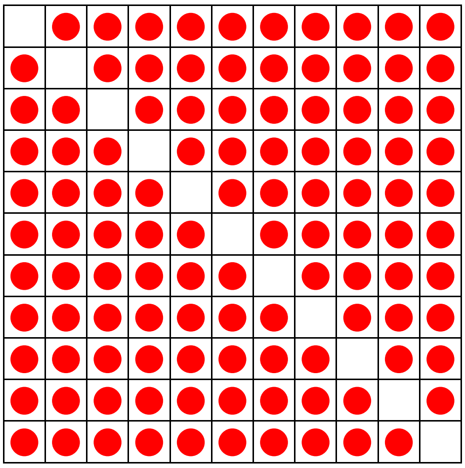
化為$\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}$，$\dfrac{4}{7}$；

前後配對：$\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2n}\right)+\left(\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{2n-1}\right)+\cdots$，$\dfrac{2}{7}$；(未說明$2|n$，扣$\dfrac{1}{7}$)

說明：$3n+1$無法整除分母，$\dfrac{1}{7}$。

7. 在桌上有 11 堆石子，每堆各 10 枚。小皮與小貝進行以下遊戲：他們輪流從中取石子，規定小皮每次只能從同一堆中取 1、2 或 3 枚石子，而小貝只能從 1、2 或 3 堆中各取一枚。小皮先拿，拿到最後一枚石子者勝。無論對手如何應對，請問誰有必勝的策略？（十二分）

【參考解法一】



將這 11 堆的 110 枚石子如圖所示之方式放在 11×11 的方格表內，其中每一行代表一堆。可知小皮一定是從同一行中取石子而小貝一定是從不同行中各取一枚石子。小貝可採取的策略為以空白的主對角線為對稱軸，取出與小皮所取出的石子位置對稱的位置上的石子。因沒有石子同時位在每一列與跟它對稱的行上，因此小貝一定可以依此策略取走對應的石子。因石子數共有偶數個，故知此策略為小貝的必勝策略。

【參考解法二】

不妨將這 11 堆的 110 枚石子如下所示之方式標記：

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A 堆： | 00 | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 |
| B 堆： | 00 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| C 堆： | 01 | 11 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| D 堆： | 02 | 12 | 22 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| E 堆： | 03 | 13 | 23 | 33 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| F 堆： | 04 | 14 | 24 | 34 | 44 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 |
| G 堆： | 05 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 66 | 67 | 68 | 69 |
| H 堆： | 06 | 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 | 77 | 78 | 79 |
| I 堆： | 07 | 17 | 27 | 37 | 47 | 57 | 67 | 77 | 88 | 89 |
| J 堆： | 08 | 18 | 28 | 38 | 48 | 58 | 68 | 78 | 88 | 99 |
| K 堆： | 09 | 19 | 29 | 39 | 49 | 59 | 69 | 79 | 89 | 99 |

注意到若有兩枚石子有相同的號碼，則這兩枚石子必分別在不同的石子堆之中，且若有兩枚石子的號碼分別與在同一堆的兩枚石子號碼相同，則這兩枚石

子必在不同堆中。此時無論小皮如何取石子，小貝只要取其他堆中與小皮所取的石子相同編號的石子，便可保證小貝可取到最後一枚石子而獲勝。

【評分標準】

有略為修改後可行之策略，$\frac{3}{7}$；

說明策略必勝，$\frac{4}{7}$。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》